Nel linguaggio degli ordini stretti L_{os} si scriva una formula $\varphi(x)$ (con la notazione semiformale usata dal capitolo 3 in poi) che dice che esiste il minimo dei maggioranti di x.

$$\exists y \left[x < y \wedge \neg \exists z [x < z < y] \right]$$

Siano φ e ψ degli enunciati, e T una teoria consistente con $\varphi \wedge \psi$. Sono le seguenti affermazioni sono sempre vere?

a. T è consistente con $\varphi \vee \psi$; si

b. $T \nvDash \neg\varphi$ si

c. $T \vDash \varphi \wedge \psi$ no

d. $T \vDash \varphi \vee \psi$ no

Quale implicazioni valgono tra le seguenti affermazioni?

a. $M \preceq N$;

b. $M \subseteq N$ e $M \equiv N$. a $\Rightarrow$ b $\not\Rightarrow$ a

---

Siano M ed N due strutture isomorfe. Sono le seguenti affermazioni vere?

a. $M \equiv N$; si

b. esiste una mappa elementare $h : M \to N$; si

c. ogni immersione parziale $h : M \to N$ è una mappa elementare; no

d. ogni isomorfismo $h : M \to N$ è una mappa elementare. si

Sia $\varphi(x)$ una formula, T una teoria, M un modello non vuoto di T. Supponiamo che $\varphi(M) \neq \varnothing$. Sono le seguenti affermazioni sempre vere?

a. $M \vDash \neg\forall x\, \varphi(x)$; no

b. $T \vDash \exists x\, \varphi(x)$; no

c. $T \nvDash \exists x\, \varphi(x)$; no

d. $T \nvDash \neg\exists x\, \varphi(x)$. si

Come sopra, ma ora T è una teoria completa. Sono le seguenti affermazioni sempre vere?

a. $M \vDash \neg\forall x\, \varphi(x)$; no

b. $T \vDash \exists x\, \varphi(x)$; si

c. $T \nvDash \exists x\, \varphi(x)$; no

d. $T \nvDash \neg\exists x\, \varphi(x)$. si

Il linguaggio contiene un simbolo di relazione binaria $\sim$ che useremo con notazione infissa. Supponiamo che $x \sim y$ definisca nella struttura M una relazione di equivalenza con esattamente 3 classi di equivalenza. In quali di seguenti casi si può dire che N è anche una relazione di equivalenza? In quali casi si può dire che contiene esattamente tre classi?

$$M \subseteq N \qquad N \subseteq M \qquad M \equiv N \qquad M \preceq N \qquad N \preceq M$$

Giustificare concisamente le risposte positive.

La proprietà di essere una relazione di equivalenza si esprime con enunciati del prim'ordine:

Riflessività: $\forall x\,[x \sim y]$

Simmetria: $\forall x\,y\,[x \sim y \to y \sim x]$

Transitività: $\forall x\,y\,z\,[x \sim y \sim z \to x \sim z]$

Se questi valgono in M, valgono anche in ogni $N \equiv M$ e, a maggior ragione, quando $M \preceq N$ o $N \preceq M$. Poichè riflessività simmeria e transitività si esprimono con enunctati universali, questi valgono anche quando $N \subseteq M$.

Il seguente enunciato dice che ci sono esattamente tre classi di equivalenza

$$\exists x\,y\,z\,\Big[x \not\sim y \ \wedge\ y \not\sim z \ \wedge\ x \not\sim z \ \wedge\ \forall w(w \sim x \ \vee\ w \sim y \ \vee\ w \sim z)\Big].$$

Quindi, se vale in M, vale anche in ogni $N \equiv M$ e, maggior ragione, quando $M \preceq N$ o $N \preceq M$.

Pensiamo ai gruppi come strutture di segnatura $L_{\mathrm{gm}} = \{e, \cdot, {}^{-1}\}$. Sia G un gruppo. Sia $\varphi(x)$, dove x è una singola variabile, una formula pura che definisce in G un sottogruppo normale H. Si dimostri che per ogni $G' \equiv G$ la formula $\varphi(x)$ definisce un sottogruppo normale di G'.

La formula $\varphi(x)$ definisce un sottogruppo se

$$\varphi(e), \qquad \forall x\,[\varphi(x) \to \varphi(x^{-1})], \qquad \forall x\,y\,[\varphi(x) \wedge \varphi(y) \to \varphi(x \cdot y)].$$

Il sottogruppo H è normale se $zHz^{-1} = H$ per ogni $z \in G$. Il sottogruppo zHz^{-1} è definibile dalla formula

$$\psi(z,x) \quad = \quad \exists y\,[\,x = z \cdot y \cdot z^{-1} \ \wedge\ \varphi(y)\,].$$

Quindi H è normale se $\forall z\,\forall x\,[\varphi(x) \leftrightarrow \psi(z,x)]$. Questo dimostra che la proprietà "$\varphi(x)$ definisce un sottogruppo normale" è esprimibile al prim'ordine, quindi se vera in G, è vera anche in ogni $G' \equiv G$.

Siano N_1 ed N_2 due grafi aleatori numerabili. Sia N un grafo che ha per dominio l'unione disgiunta di N_1 ed N_2 e come archi quelli di N_1 più quelli di N_2 più quelli che congiungono tutti i vertici di N_1 con tutti i vertici di N_2. Si dimostri concisamente che N non è un grafo aleatorio. Esiste un immersione di N in un grafo aleatorio? Mostrare che l'insieme N_1 è definibile con parametri in N.

Verifichiamo che N non è un grafo aleatorio: presi 2 vertici $a \in N_1$ e $b \in N_2$ non esiste nessun vertice z collegato con nessun veretice di $\{a, b\}$. Infatti, ogni $z \in N_1$ è collegato con b e ogni $z \in N_2$ è collegato con a. è possibile immergere N in un grafo aleatorio perchè ogni grafo numerabile si immege in un grafo aleatorio.

Preso un qualunque elemento $a \in N_1$ la formula $\exists y\, [\neg r(a, y) \wedge \neg r(x, y)]$ è soddisfatta da tutti gli elementi di N_1 perchè N_1 è un grafo aleatorio. Non può essere soddisfatta da nessun $x \in N_2$ perchè l'elemento y richiesto non può appartenere nè ad N_1 nè ad N_2.