

Quesito 1 di 4

Nel linguaggio degli ordini stretti L_{os} si scriva una formula $\varphi(x)$ (con la notazione semiformale usata dal capitolo 3 in poi) che dice che esiste il minimo dei maggioranti di x .

Siano φ e ψ degli enunciati, e T una teoria consistente con $\varphi \wedge \psi$. Sono le seguenti affermazioni sono sempre vere?

- a. T è consistente con $\varphi \vee \psi$;
- b. $T \not\models \neg\varphi$
- c. $T \models \varphi \wedge \psi$
- d. $T \models \varphi \vee \psi$

Quale implicazioni valgono tra le seguenti affermazioni?

- a. $M \preceq N$;
- b. $M \subseteq N$ e $M \equiv N$.

Siano M ed N due strutture isomorfe. Sono le seguenti affermazioni vere?

- a. $M \equiv N$;
- b. esiste una mappa elementare $h : M \rightarrow N$;
- c. ogni immersione parziale $h : M \rightarrow N$ è una mappa elementare;
- d. ogni isomorfismo $h : M \rightarrow N$ è una mappa elementare.

Sia $\varphi(x)$ una formula, T una teoria, M un modello non vuoto di T . Supponiamo che $\varphi(M) \neq \emptyset$. Sono le seguenti affermazioni sempre vere?

- a. $M \models \neg\forall x \varphi(x)$;
- b. $T \models \exists x \varphi(x)$;
- c. $T \not\models \exists x \varphi(x)$;
- d. $T \not\models \neg\exists x \varphi(x)$.

Come sopra, ma ora T è una teoria completa. Sono le seguenti affermazioni sempre vere?

- a. $M \models \neg\forall x \varphi(x)$;
- b. $T \models \exists x \varphi(x)$;
- c. $T \not\models \exists x \varphi(x)$;
- d. $T \not\models \neg\exists x \varphi(x)$.

Quesito 2 di 4

Il linguaggio contiene un simbolo di relazione binaria \sim che useremo con notazione infissa. Supponiamo che $x \sim y$ definisca nella struttura M una relazione di equivalenza con esattamente 3 classi di equivalenza. In quali di seguenti casi si può dire che N è anche una relazione di equivalenza? In quali casi si può dire che contiene esattamente tre classi?

$$M \subseteq N \quad N \subseteq M \quad M \equiv N \quad M \preceq N \quad N \preceq M$$

Giustificare concisamente le risposte positive.

Quesito 3 di 4

Pensiamo ai gruppi come strutture di segnatura $L_{\text{gm}} = \{e, \cdot, {}^{-1}\}$. Sia G un gruppo. Sia $\varphi(x)$, dove x è una singola variabile, una formula pura che definisce in G un sottogruppo normale H . Si dimostri che per ogni $G' \equiv G$ la formula $\varphi(x)$ definisce un sottogruppo normale di G' .

Quesito 4 di 4

Siano N_1 ed N_2 due grafi aleatori numerabili. Sia N un grafo che ha per dominio l'unione disgiunta di N_1 ed N_2 e come archi quelli di N_1 più quelli di N_2 più quelli che congiungono tutti i vertici di N_1 con tutti i vertici di N_2 . Si dimostri concisamente che N non è un grafo aleatorio. Esiste un immersione di N in un grafo aleatorio? Mostrare che l'insieme N_1 è definibile con parametri in N .