- Sia $h : M \to N$ un'immersione parziale suriettiva tra due strutture arbitrarie. Sono le seguenti affermazioni vere? (Ripondere si/no, non serve giustificare.)

  a. $h^{-1} : N \to M$ è un'immersione; si

  b. $M \equiv N$; no

  c. $\operatorname{dom} h$ è una sottostruttura di M isomorfa ad N; si

  d. $\operatorname{dom} h$ è una sottostruttura elementare di M. no

- Sia M un grafo aleatorio numerabile. Sono le seguenti affermazioni vere? (Ripondere si/no, non serve giustificare.)

  a. Esiste un vertice collegato a solo 2 altri vertici. no

  b. Esiste un vertice collegato a tutti tranne 2 vertici. no

  c. Ogni vertice è collegato a infiniti e scollegato a infiniti altri vertici. si

  d. Ogni grafo numerabile è isomorfo a un sottografo di M. si

- Nel linguaggio che contiene un simbolo di funzione unaria f ed un predicato unario r si scriva un'enunciato che dice che l'immagine della funzione f contiene r.

$$\forall y \; [r\, y \longrightarrow \exists x \; f x = y]$$

- Consideriamo la struttura N con dominio l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali in un linguaggio che estende il linguaggio degli ordini stretti. Sia $N \preceq {}^*N$. Si dimostri che ogni elemento di ${}^*N \smallsetminus N$ maggiora tutti gli elementi di N.

Fissiamo $a \in {}^*N \preceq N$. Poichè N è un ordine lineare per elementarità anche ${}^*N$ lo è. Basta quindi escludere l'esistenza di un $n \in N$ tale che $a < n$. Sia $n \in N$ minimo tale che $a < n$. Per minimalità $n - 1 < a \leq n$. Ma $N \vDash \neg\exists x\,[n - 1 < x < n]$ e per elementarità questo vale anche in ${}^*N$.

- Siano N ed $^*N$ come nell'esercizio precedente. Sia $\varphi(x)$ una formula, dove x è una singola variabile. Si dimostri che le seguenti affermazioni sono equivalenti:

  1. $\varphi(N) \neq \varphi(^*N)$
  2. $\varphi(N)$ è infinito.

  Suggerimento: in N essere infinito è equivalente all'esistenza di elementi arbitrariamente grandi. Si usi l'esercizio precedente.

1⇒2. Sia $a \in {}^*N \smallsetminus M$ tale che $\varphi(a)$. Allora per l'esercizio precedente, per ogni $n \in N$ abbiamo $^*N \vDash \exists x\, [x > n \wedge \varphi(x)]$. Per elementarità questo è vero anche in N. Quindi $\varphi(N)$ è infinito.

2⇒1. Se in $\varphi(N)$ è infinito allora $N \vDash \forall z\, \exists x\, [x > z \wedge \varphi(x)]$. Per elementarità questo è vero anche in $^*N$. Fissiamo un qualsiasi $a \in {}^*N \smallsetminus M$. Avremo che $^*N \vDash \exists x\, [x > a \wedge \varphi(x)]$, quindi $\varphi(N) \neq \varphi(^*N)$ segue dall'esercizio precedente.