- Il linguaggio è quello degli ordini stretti. I seguenti intervalli denotano sottostrutture di $\mathbb{Q}$. Sono le seguenti affermazioni vere? (Ripondere si/no, non serve giustificare.)

a. $[0,1) \preceq [0,2)$ si

b. $[1,2) \preceq [0,2)$ no

c. $[0,1] \equiv [0,2]$ si

d. $[1,2] \equiv [0,2)$ no

e. $[0,1] \equiv [1,2)$ no

- Sia $h : M \to N$ una mappa elementare tra due strutture arbitrarie. Sono le seguenti affermazioni vere? (Ripondere si/no, non serve giustificare.)

a. esiste un isomorfismo che estende $h : M \to N$; no

b. $M \equiv N$; si

c. $h : M \to N$ è un immersione parziale; si

d. esiste una immersione elementare che estende $h : M \to N$. no

- Nel linguaggio che contiene un simbolo di funzione unaria f ed un predicato unario r si scriva un'enunciato che dice che l'immagine della funzione f è contenuta in r.

$$\forall x \; r \, f \, x$$

- Sia $h : M \to N$ una mappa elementare tra due strutture arbitrarie. Si dimostri che se $M' \preceq M$ allora $h{\restriction}M' : M' \to N$ è una mappa elementare.

Per ogni $a \in \operatorname{dom} h \cap M'$ e per ogni formula pura $\varphi(x)$ abbiamo

$$M' \vDash \varphi(a) \quad \overset{1}{\Leftrightarrow} \quad M \vDash \varphi(a) \quad \overset{2}{\Leftrightarrow} \quad N \vDash \varphi(ha)$$

1. vale perché $M' \preceq M$

2. vale perché $h : M' \to N$ è elementare.

- Sia M una struttura infinita e sia $\varphi(x)$ una formula. Dimostrare che se $\varphi(N) = \varphi(M)$ per ogni $M \preceq N$ allora $\varphi(M)$ è finito.

Supponiamo che $\varphi(M)$ sia infinito. Allora M realizza ogni sottinsieme finito del seguente insieme di formule

$$\Big\{x \neq a \ : \ a \in \varphi(M)\Big\} \ \cup \ \Big\{\varphi \ : \ M\text{-formula t.c. } M \models \varphi\Big\}.$$

Per compattezza questo insieme ha un modello N. Il primo disgiunto garantisce $\varphi(N) \neq \varphi(M)$, il secondo $M \preceq N$.