4. Proiezioni del piano e dello spazio

La visualizzazione di oggetti tridimensionali richiede di ottenere una vista piana dell'oggetto. Questo avviene mediante una sequenza di operazioni. Innanzitutto, viene applicata una *proiezione* che trasforma l'oggetto in una sua rappresentazione su un piano dello spazio, il *piano di vista*. Poi, sul piano di vista viene introdotto un sistema di coordinate cartesiane e la proiezione dell'oggetto viene descritta in termini di tali coordinate bidimensionali. Infine, una trasformazione di coordinate bidimensionali applica il piano di vista nel piano dove avviene la visualizzazione (la lavagna, una 'finestra' nello schermo del computer, il foglio di un plotter...).

4.1 Proiezioni del piano

Prima di passare al caso tridimensionale, consideriamo le proiezioni del piano su una retta. Sia l una retta del piano e C un punto non appartenente alla retta. La *proiezione* da C (il *centro* della proiezione) su l è la trasformazione T che applica un qualsiasi punto P del piano, distinto da C, nel punto P_1 intersezione della retta l con la retta per C e P. Naturalmente, se il punto P sta sulla retta per C parallela a l, il punto P_1 non è definito nel piano cartesiano, ma se utilizziamo le coordinate omogenee ed estendiamo il piano con i punti all'infinito, P_1 è il punto improprio della retta l.

Mostriamo ora che la proiezione si può rappresentare ancora mediante una matrice 3x3, come per le trasformazioni affini del piano:

denotiamo con C e l anche i vettori delle coordinate omogenee del centro e della retta. La retta per C e P ha coordinate omogenee il vettore prodotto $C \times P$ (vedi la sezione 2.4) e quindi interseca la retta l nel punto P_1 di coordinate omogenee

$$P_1 = l \times (C \times P)$$

Dall'identità vettoriale $A \times (B \times C) = (C \,.\, A)\, B - (A \,.\, B)\, C$, si ottiene

$$P_1 = l \times (C \times P) = (P \,.\, l)\, C - (l \,.\, C)\, P$$

e considerando i vettori come matrici con una sola riga,

$$P_1 = P\, l^T C - P\,(l \,.\, C) = P\,(l^T C - (l \,.\, C)) = P\,(l^T C - (l \,.\, C)\, I_3)$$

Dunque $P_1 = P\, M$, con

$$M = l^T C - (l \,.\, C)\, I_3$$

matrice di proiezione (I_3 è la matrice identità di ordine 3).

Esempio: la proiezione dal punto (10,2) sulla retta $5\,x + y - 4 = 0$ ha matrice

$$M = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix} [10 \quad 2 \quad 1] - ((5, 1, -4) \,.\, (10, 2, 1)) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 10 & 5 \\ 10 & -46 & 1 \\ -40 & -8 & -52 \end{bmatrix}$$

Ad esempio, il punto (2,3) viene trasformato nel punto di coordinate omogenee

$(2, 3, 1) \begin{bmatrix} 2 & 10 & 5 \\ 10 & -46 & 1 \\ -40 & -8 & -52 \end{bmatrix} = (-6, -126, -39)$, cioè nel punto $\left[\frac{6}{39}, \frac{126}{39}\right]$ sulla retta $5\,x + y - 4 = 0$.

Osservazione: le proiezioni e le trasformazioni affini del piano, estese ai punti del piano proiettivo, sono esempi di *trasformazioni proiettive* del piano, che sono le applicazioni T definite in coordinate omogenee dal prodotto

$$T(X, Y, Z) = (X, Y, Z)\, M$$

con M matrice 3x3 non nulla.Se la terza colonna di M ha elementi 0, 0, k, con $k \neq 0$, allora T è una trasformazione affine (sostituendo alla matrice M la matrice $\frac{M}{k}$ si ottiene la stessa trasformazione, poiché le coordinate sono omogenee), che applica punti propri in punti propri e punti all'infinito (impropri) in punti all'infinito. Se invece la matrice M non ha questa forma, allora rappresenta una trasformazione di tipo diverso, come una proiezione, e può anche non essere definita per tutti i punti del piano proiettivo (se $P\,M = (0, 0, 0)$, l'immagine di P non è definita, poiché la terna delle coordinate omogenee deve essere diversa da (0, 0, 0)).

Nella discussione precedente, l'uso delle coordinate omogenee permette di prendere come centro di proiezione C anche un punto improprio $(c_1, c_2, 0)$ di P^2. In questo caso, la retta passante per C e P è la retta per P che ha C come punto all'infinito, cioè con direzione il vettore (c_1, c_2). Si tratta dunque di una <u>*proiezione parallela*</u>, in cui le rette che proiettano i punti del piano sulla retta l sono tutte parallele, con direzione (c_1, c_2). Per distinguere i due casi, chiameremo <u>*proiezione centrale*</u> una proiezione con centro un punto proprio.

Esempio: la proiezione parallela dal punto improprio (0,1,0) (la direzione dell'asse y) sulla retta $3\,x + 2\,y - 4 = 0$ ha matrice

$$M = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} - ((3, 2, -4)\,.\,(0, 1, 0)) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -2 \end{bmatrix}$$

Si noti che nel caso delle proiezioni parallele M è la matrice di una trasformazione affine. Infatti una proiezione parallela applica punti propri in punti propri ed è definita su tutto il piano cartesiano. Si tratta di una trasformazione affine singolare, cioé non invertibile.

4.2 Proiezioni dello spazio

Passiamo ora a descrivere le proiezioni dello spazio tridimensionale su un piano. Sia N il vettore delle coordinate omogenee del piano di proiezione (il piano di vista) e sia C un punto esterno al piano. La <u>*proiezione*</u> da C sul piano N è la trasformazione T che applica un punto P, distinto da C, nel punto $T(P) = P_1$ del piano di vista che si ottiene intersecando il piano con la retta per C e P. Se P appartiene al piano per C parallelo al piano di vista, P_1 è il punto all'infinito nella direzione della retta per C e P. Se C è un punto improprio, la proiezione è <u>*parallela*</u> (con direzione delle rette di proiezione data da C), altrimenti è detta <u>*centrale*</u> o <u>*proiezione prospettica*</u>.

Ricaviamo la matrice della proiezione:

i punti della retta per C e P hanno coordinate omogenee della forma $\alpha\, C + \beta\, P$ (vedi la sezione 3.3) e l'intersezione P_1 tra tale retta e il piano di vista è caratterizzata dalla condizione

$$N\,.\,(\alpha\, C + \beta\, P) = 0 \quad \text{cioé} \quad \alpha\,(N\,.\,C) + \beta\,(N\,.\,P) = 0$$

Scegliendo $\alpha = N\,.\,P$ e $\beta = -(N\,.\,C)$ si ottiene

$$P_1 = (N\,.\,P)\,C - (N\,.\,C)\,P = P\,N^T C - P\,(N\,.\,C) = P\,(N^T C - (N\,.\,C)\,I_4)$$

Dunque $T(X, Y, Z, W) = (X, Y, Z, W)\,M$, con $M = N^T C - (N\,.\,C)\,I_4$.

Come nel caso bidimensionale, le proiezioni sono esempi di <u>*trasformazioni proiettive*</u> dello spazio. Le proiezioni centrali non sono trasformazioni affini, diversamente da quelle parallele. Una conseguenza del fatto che una proiezione parallela trasforma punti impropri in punti impropri, è la seguente proprietà: ogni coppia di rette *parallele* viene trasformata da una *proiezione parallela* in una coppia di rette ancora *parallele* (le due rette devono incontrarsi ancora in un punto improprio).

Esempio 1: la proiezione parallela sul piano $z = 0$ in direzione parallela all'asse z ha matrice

$$M = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0] - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

poiché il piano di vista $z = 0$ ha equazione omogenea $Z = 0$ e vettore delle coordinate omogenee $N = (0, 0, 1, 0)$ e il centro (punto improprio) ha coordinate omogenee $C = (0, 0, 1, 0)$. Naturalmente, la proiezione associa al punto di coordinate cartesiane (x, y, z) il punto di coordinate omogenee $[x, y, z, 1]\, M = [-x, -y, 0, -1]$ e di coordinate cartesiane $(x, y, 0)$.

Esempio 2: la proiezione centrale sul piano $z = 0$ dal punto di vista $(1, 5, 3)$ ha matrice

$$M = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} [1 \quad 5 \quad 3 \quad 1] - 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Dunque la trasformazione associa al punto di coordinate cartesiane (x, y, z) il punto di coordinate omogenee $[x, y, z, 1]\, M = [-3\,x + z, -3\,y + 5\,z, 0, z - 3]$ e di coordinate cartesiane $\left[\frac{-3\,x + z}{z - 3}, \frac{-3\,y + 5\,z}{z - 3}, 0\right]$. Si noti che nel caso di trasformazioni proiettive che non sono affini, le coordinate cartesiane del punto trasformato si esprimono mediante quozienti di espressioni di primo grado nelle coordinate x, y, z.

Esempi

```
> with(linalg):with(plottools):
> colore:=[red,green,blue,white]:
> tetraedro:= proc(l) local i,ll; global faccia;
  ll:=convert(l,listlist):for i from 1 to 4 do
  faccia[i]:=polygon(subsop(i=NULL,ll),color=colore[i])
  od; RETURN(convert(faccia,set)) end:
> t0:=[[0,0,0],[1,0,0],[0,1,0],[0,0,1]];
> disegno3d:=f->plots[display](f,scaling=CONSTRAINED,axes
  =NORMAL,labels=[x,y,z]):
> omogeneo:=f->augment(f,vector(rowdim(f),1)):
> nonomogeneo:=f->matrix([seq([seq(f[i,j]/f[i,coldim(f)],
  j=1..coldim(f)-1)],i=1..rowdim(f))]):
> trasforma:=(f,m)->nonomogeneo(evalm(omogeneo(f)&*m)):
```
la funzione che esegue la trasformazione è modificata per poter rappresentare una qualsiasi trasformazione proiettiva

```
> MP:=(N,C)->evalm(transpose([N])&*[C]- dotprod(N,C)*
```

```
Matrix(4,4,shape=identity)):
```
matrice di proiezione dal centro C sul piano N

```
> MP([0,0,1,0],[1,5,3,1]);
> t1:=trasforma(t0,MP([0,0,1,0],[1,5,3,1]));
```
proiezione del tetraedro t0 sul piano $z = 0$ dal punto (1, 5, 3)

```
> disegno3d(tetraedro(t0) union tetraedro(t1));
> t2:=trasforma(t0,MP([0,2,3,4],[1,-2,3,0]));
```
proiezione parallela di t0 sul piano $2\,y + 3\,z + 4 = 0$ nella direzione del vettore $(1, -2, 3)$

```
> disegno3d(tetraedro(t0) union tetraedro(t2));
>
```

4.3 Classificazione delle proiezioni

4.3.1 Proiezioni parallele

Le proiezioni dello spazio alterano le distanze tra i punti. In generale, il rapporto tra la lunghezza del segmento proiettato e la lunghezza del segmento originale è differente da 1. Tale rapporto dipende solo dalla direzione del segmento e per questo lo chiameremo *fattore di scala* nella direzione determinata da un vettore v.

Il segmento con estremi $P = (p_1, p_2, p_3)$ e $Q = (p_1 + t\,v_1, p_2 + t\,v_2, p_3 + t\,v_3) = P + t\,(v_1, v_2, v_3)$ ha lunghezza $|t|\,|v|$ e viene trasformato dalla proiezione con matrice $M = N^T C - (N\,.\,C)\,I_4$ nel segmento i cui estremi hanno coordinate omogenee $[p_1, p_2, p_3, 1]\,M$ e $[q_1, q_2, q_3, 1]\,M = [p_1, p_2, p_3, 1]\,M + t\,[v_1, v_2, v_3, 0]\,M$. La quarta colonna di M ha elementi $(0, 0, 0, -(N\,.\,C))$, per cui la quarta coordinata omogenea viene moltiplicata per $-(N\,.\,C)$. Ne deriva che il segmento proiettato ha lunghezza $\dfrac{|t|\,|[v_1, v_2, v_3, 0]\,M|}{|N\,.\,C|}$. Dunque il fattore di scala in direzione v è

$$\frac{|[v_1, v_2, v_3, 0]\,M|}{|N\,.\,C|\,|v|} \qquad (1)$$

dipendente solo dalla direzione di v.

Esercizio: Mostrare che per ogni proiezione parallela il fattore di scala in una direzione parallela al piano di vista è 1.

Esercizio: Mostrare che il fattore di scala in direzione perpendicolare al piano di vista è uguale a f se, e solo se, l'angolo θ tra il piano di vista e la direzione di proiezione soddisfa la relazione

$$\sin(\theta)^2 = \frac{1}{1 + f^2} \quad \text{ovvero} \quad \text{cotan}(\theta) = f$$

(Suggerimento: se $c = (c_1, c_2, c_3)$ è la direzione di proiezione, si ha $C = (c_1, c_2, c_3, 0)$. Si applichi la formula (1) con $(v_1, v_2, v_3) = (n_1, n_2, n_3) = n$ e si ottenga $\dfrac{(n\,.\,c)^2}{|n|^2\,|c|^2} = \dfrac{1}{1 + f^2}$)

Una proiezione parallela è detta *ortogonale* se la direzione di proiezione è perpendicolare al piano di vista. In tal caso, se il piano ha vettore omogeneo $N = [n_1, n_2, n_3, n_4]$, il centro di proiezione è $C = [-n_1, -n_2, -n_3, 0]$ (o un qualsiasi suo

multiplo non nullo).
Se la direzione della proiezione non è parallela a uno degli assi coordinati, solitamente la proiezione ortogonale è detta *assonometrica*. A loro volta tali proiezioni assonometriche si distinguono in *isometriche*, *dimetriche* e *trimetriche*, a seconda che 3, 2 o nessuno dei valori assoluti $|n_1|, |n_2|, |n_3|$ siano uguali tra di loro. Nel primo caso i fattori di scala nelle direzioni dei tre assi sono uguali, nel secondo sono uguali nelle direzioni di due assi.

Esercizio: Sia $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$. Mostrare che il fattore di scala in direzione x è $\sqrt{n_2^2 + n_3^2}$, in direzione y è $\sqrt{n_1^2 + n_3^2}$, in direzione z è $\sqrt{n_1^2 + n_2^2}$.

Una proiezione parallela è *obliqua* se non è ortogonale. In particolare, si ottiene una *proiezione cavaliera* se l'angolo θ tra il piano di vista e la direzione di proiezione è $\frac{\pi}{4}$. In questo caso i segmenti perpendicolari al piano di vista non cambiano lunghezza ($f = 1$ nell'esercizio visto sopra). Si ottiene invece una *proiezione 'cabinet'* se l'angolo è tale che $\cot\text{an}(\theta) = \frac{1}{2}$, cioè se $f = \frac{1}{2}$ (l'angolo θ è circa 1.1 radianti).

Esempio:

Definiamo una proiezione 'cabinet' sul piano $z = 0$. Il vettore normale è $n = (0, 0, 1)$. Se $c = (c_1, c_2, c_3)$ è la direzione di proiezione, si ottiene una proiezione 'cabinet' quando

$$\frac{(n \,.\, c)^2}{|n|^2 |c|^2} = \frac{4}{5} \qquad \text{(deve essere } f = \frac{1}{2}\text{; vedi l'esercizio sopra e il suggerimento)}$$

Dunque la condizione sulla direzione c diventa

$$\frac{c_3^2}{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2} = \frac{4}{5} \quad \text{ovvero} \quad 4(c_1^2 + c_2^2) = c_3^2$$

Una possibile direzione è $c = (3, 4, 10)$, corrispondente alla matrice di proiezione

```
> MP([0,0,1,0],[3,4,10,0]);
> colore:=[red,green,blue,white,black,yellow]:
> vertici:=[[1,2,4,3],[1,2,6,5],[1,3,7,5],[2,4,8,6],[3,
  4,8,7],[5,6,8,7]]:
> box:= proc(l) local i,ll; global faccia6;
  ll:=convert(l,listlist):for i from 1 to 6 do
  faccia6[i]:=polygon([seq(ll[vertici[i,j]],j=1..4)],co
  lor=colore[i]) od; RETURN(convert(faccia6,set)) end:
> c0:=[[0,0,0],[1,0,0],[0,1,0],[1,1,0],[0,0,1],[1,0,1],
  [0,1,1],[1,1,1]];
> c1:=trasforma(c0,MP([0,0,1,0],[3,4,10,0]));
```
proiezione 'cabinet' del cubo unitario c0 sul piano $z = 0$

```
> disegno3d(box(c0) union box(c1));
> c2:=trasforma(c0,MP([0,0,1,0],[3,4,5,0]));
```
proiezione cavaliera di c0 sul piano $z = 0$
```
> disegno3d(box(c2));
>
```

4.3.2 *Proiezioni prospettiche*

Sia $M = N^T C - (N \,.\, C)\, I_4$ la matrice che rappresenta la proiezione prospettica dal centro $C = (c_1, c_2, c_3, c_4)$ (con $c_4 \neq 0$) sul piano $n_1\, x + n_2\, y + n_3\, z + n_4 = 0$. Sia $v = (v_1, v_2, v_3)$ una direzione nello spazio, corrispondente al punto improprio $V = (v_1, v_2, v_3, 0)$. La proiezione di V è ancora un punto improprio se la quarta componente del prodotto $V M = V N^T C - (N \,.\, C)\, V$ è zero, cioè se

$$(v_1\, n_1 + v_2\, n_2 + v_3\, n_3)\, c_4 = 0$$

Ma $c_4 \neq 0$ e quindi la condizione diventa $v_1\, n_1 + v_2\, n_2 + v_3\, n_3 = 0$. Dunque la direzione v deve essere perpendicolare alla normale $n = (n_1, n_2, n_3)$, cioè parallela al piano di vista.
Questo fatto implica che le rette parallele che non sono parallele al piano di proiezione vengono proiettate in rette che convergono verso un punto del piano di proiezione, il *punto di fuga*, mentre le rette parallele al piano di proiezione restano parallele.
Il piano di proiezione può essere parallelo a nessuno, a uno o a due assi coordinati.
Rispettivamente, si hanno 3,2,1 punti di fuga (*principali*) per le rette parallele agli assi coordinati.

Esempio

```
> c3:=trasforma(c0,MP([0,0,1,0],[-1,0,2,1]));
```
proiezione prospettica sul piano z = 0 dal punto (-1,0,2) con un punto di fuga principale (quello derivante dalle rette parallele all'asse z)
```
> evalm([[0,0,1,0]]&*MP([0,0,1,0],[-1,0,2,1]));
```
il punto di fuga principale è (-1,0,0)
```
> disegno3d(`union`(box(c0),box(c3),{point([-1,0,0],sym
  bol=CIRCLE)}));
> c4:=trasforma(c0,MP([1,0,-1,-2],[-1,0,2,1])):
```
proiezione sul piano $x - z - 2 = 0$ dal punto (-1,0,2)
```
> evalm([[1,0,0,0],[0,0,1,0]]&*MP([1,0,-1,-2],[-1,0,2,1
  ]));
```
i due punti di fuga principali sono (4,0,2) e (-1,0,-3)
```
> disegno3d(`union`(box(c0),box(c4),{point([4,0,2],symb
  ol=CIRCLE)},{point([-1,0,-3],symbol=CIRCLE)}));
>
```

4.4 Coordinate del piano di vista

Il secondo passo per ottenere una visualizzazione di oggetti tridimensionali è l'introduzione di un sistema di coordinate cartesiane sul piano di vista e la rappresentazione dell'oggetto proiettato in termini di queste nuove coordinate bidimensionali. Per introdurre le coordinate

sul piano di vista è necessario fissare un'origine e due direzioni ortogonali nel piano. Denotiamo con $O_1 = (q_1, q_2, q_3, 1)$ l'origine espressa nelle coordinate omogenee (X, Y, Z, W) dello spazio, con $v_r = (r_1, r_2, r_3)$ e $v_s = (s_1, s_2, s_3)$ due vettori unitari ortogonali nelle direzioni degli assi del nuovo riferimento. Sia $P_1 = (X, Y, Z, W)$ un punto del piano, espresso in coordinate omogenee dello spazio, e $P_2 = (R, S, T)$ il vettore delle coordinate omogenee dello stesso punto rispetto alle *coordinate del piano di vista*.
Vogliamo determinare una matrice 3x4 K tale che

$$P_1 = P_2\, K$$

e poi cercare di invertire la relazione e ottenere P_2 in funzione di P_1. Per calcolare K prendiamo alcuni punti del piano di vista di cui conosciamo le coordinate in entrambi i sistemi di riferimento:
l'origine $O_1 = (q_1, q_2, q_3, 1)$, il punto improprio in direzione v_r: $R_1 = (r_1, r_2, r_3, 0)$, quello in direzione v_s: $S_1 = (s_1, s_2, s_3, 0)$ e il punto del piano che si ottiene traslando O_1 mediante il vettore somma $v_r + v_s$: $T_1 = (q_1 + r_1 + s_1, q_2 + r_2 + s_2, q_3 + r_3 + s_3, 1) = (t_1, t_2, t_3, 1)$.
I quattro punti hanno coordinate omogenee (R, S, T) rispetto al nuovo riferimento (0,0,1), (1,0,0), (0,1,0), (1,1,1) rispettivamente. Quindi deve valere l'uguaglianza matriciale:

$$\begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 & 1 \\ r_1 & r_2 & r_3 & 0 \\ s_1 & s_2 & s_3 & 0 \\ t_1 & t_2 & t_3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} K$$

da cui si ricava che dev'essere

$$K = \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & r_3 & 0 \\ s_1 & s_2 & s_3 & 0 \\ q_1 & q_2 & q_3 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice K ha rango 3 (ha tre righe indipendenti, poiché v_r e v_s non sono paralleli) e quindi la matrice simmetrica $K\,K^T$ è una matrice invertibile di ordine 3 (se esistesse una terna non nulla $x = [x_1, x_2, x_3]^T$ tale che $K\,K^T x = 0$, si avrebbe $x^T K\,K^T x = 0$, cioè $\left| x^T K \right| = 0$, da cui $x^T K = 0$ e le righe di K sarebbero dipendenti). Si ha $K\,K^T (K\,K^T)^{(-1)} = I_3$, cioè K ha un' *inversa destra* $K^d = K^T (K\,K^T)^{(-1)}$. Possiamo quindi ottenere

$$P_1\, K^d = P_2$$

Esempio

Consideriamo la proiezione prospettica sul piano $z = 0$ dal punto (1,5,3). Definiamo un sistema di coordinate sul piano di vista con origine nel punto $O_1 = (1, 2, 0)$, direzione del primo asse data dal vettore unitario $v_r = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0\right)$ e direzione del secondo asse data da $v_s = \left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, 0\right)$. La matrice K è dunque

$$K=\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 & 0 \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } K\,K^T=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{11}{5} \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} \\ \frac{11}{5} & \frac{2}{5} & 6 \end{bmatrix} \text{ con inversa}$$

$$(K\,K^T)^{(-1)}=\begin{bmatrix} \frac{146}{25} & \frac{22}{25} & -\frac{11}{5} \\ \frac{22}{25} & \frac{29}{25} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{11}{5} & -\frac{2}{5} & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice K^d è dunque

$$K^d = K^T\,(K\,K^T)^{(-1)}=\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & 0 \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{11}{5} & -\frac{2}{5} & 1 \end{bmatrix}$$

e la trasformazione di coordinate è data in coordinate cartesiane da: $(x, y, 0)$ ->
$\left[\frac{3\,x}{5}+\frac{4\,y}{5}-\frac{11}{5}, -\frac{4\,x}{5}+\frac{3\,y}{5}-\frac{2}{5}\right]$.

```
> norma:=v->sqrt(dotprod(v,v)):
> Kd:=proc(q,r,s) local K;
  K:=augment(matrix(3,3,[r/norma(r),s/norma(s),q]),matrix
  (3,1,[0,0,1]));
  evalm(transpose(K)&*inverse(K&*transpose(K))); end
  proc:
> Kd([1,2,0],[3,4,0],[-4,3,0]);
> t0:=[[0,0,0],[1,0,0],[0,1,0],[0,0,1]]:t1:=trasforma(t0,
  MP([0,0,1,0],[1,5,3,1])):
> t2d:=trasforma(t1,Kd([1,2,0],[3,4,0],[-4,3,0]));
```
la trasformazione è applicata al tetraedro t0 proiettato (cf. 4.2)

```
> disegno2d:=f->plots[display](f,scaling=CONSTRAINED,axes
  =NORMAL,labels=[x,y]):
> disegno2d(tetraedro(t2d));
>
```

4.5 Coordinate del 'dispositivo grafico'. La 'Viewing Pipeline'

Il terzo e ultimo passo per rappresentare un oggetto tridimensionale su un *dispositivo grafico* (finestra nello schermo del computer, stampante, etc.) è il cambiamento di coordinate

bidimensionali che trasforma una regione rettangolare del piano di proiezione in una finestra nel sistema di coordinate del dispositivo. La parte dell'immagine proiettata che sta all'esterno della finestra viene tagliata (*'clipping'*), e non appare nell' immagine visualizzata.
Siano x, y le coordinate cartesiane del piano di proiezione e u, v le coordinate del dispositivo grafico. Se la regione rettangolare da rappresentare è delimitata dai valori x_{min}, x_{max}, y_{min}, y_{max} e la finestra sul dispositivo ha angolo inferiore sinistro di coordinate (u_{min}, v_{min}) e angolo superiore destro (u_{max}, v_{max}), la trasformazione di coordinate si ottiene concatenando tre trasformazioni piane: una traslazione che porta l'angolo inferiore sinistro (x_{min}, y_{min}) nell'origine, un cambiamento di scala che rende le due finestre di uguali dimensioni, seguita da una traslazione che porta l'origine nell'angolo inferiore sinistro (u_{min}, u_{max}) della seconda finestra. La trasformazione ha matrice

$$\mathrm{D} = \mathrm{T}(-x_{min}, -y_{min})\ \mathrm{S}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}, \frac{\Delta v}{\Delta y}\right)\ \mathrm{T}(u_{min}, v_{min})$$

dove $\Delta u = u_{max} - u_{min}$, $\Delta v = v_{max} - v_{min}$, $\Delta x = x_{max} - x_{min}$, $\Delta y = y_{max} - y_{min}$. Mediante il prodotto $P_3 = P_2\ \mathrm{D}$ il vettore P_2 delle coordinate omogenee del piano di vista vengono trasformate nel vettore P_3 delle coordinate omogenee nel riferimento del dispositivo.
La successione delle tre trasformazioni descritte in questo capitolo, *proiezione* su un piano ($P_1 = P\ M$), trasformazione nelle *coordinate del piano di vista* ($P_2 = P_1\ K^d$), trasformazione nelle *coordinate del dispositivo* ($P_3 = P_2$ D), è chiamata '*viewing pipeline*', ed è descritta completamente dalla matrice V_P, di ordine 4x3, che si ottiene moltiplicando le tre matrici M (matrice di proiezione), K^d (matrice della trasformazione nelle coordinate del piano di vista) e D (matrice della trasformazione nelle coordinate u, v del dispositivo):

$$V_P = M\ K^d\ \mathrm{D}, \qquad P_3 = P\ M\ K^d\ \mathrm{D} = P\ V_P$$

Esempio:

Riprendiamo l'esempio in 4.4: consideriamo la proiezione prospettica sul piano $z = 0$ dal punto (1,5,3), con il sistema di coordinate del piano di vista avente origine $\mathrm{O}_1 = (1, 2, 0)$, direzione del primo asse (3,4,0) e direzione del secondo asse (-4,3,0) .
Siano rispettivamente (-3,-3) e (3,2) gli angoli inferiore sinistro e superiore destro della finestra nel piano di vista, e siano (500,400) e (980,700) gli angoli della finestra sul dispositivo grafico (ad esempio, uno schermo con risoluzione 1280x1024). La matrice D è il prodotto

$$\mathrm{D} = \mathrm{T}(3, 3)\ \mathrm{S}\left(\frac{980 - 500}{3 - (-3)}, \frac{700 - 400}{2 - (-3)}\right)\ \mathrm{T}(500, 400)$$

```
> d :=
  evalm(T(3,3)&*S((980-500)/(3-(-3)),(700-400)/(2-(-3)))&
  *T(500,400));
```

```
> t:=trasforma(t2d,d);
```
applichiamo la trasformazione al tetraedro t0 proiettato (cf. 4.2 e 4.4)

```
> plots[display](tetraedro(t),scaling=CONSTRAINED,view=[5
  00..980,400..700],axes=BOXED);
```

```
> Vp:=evalm(MP([0,0,1,0],[1,5,3,1])&*Kd([1,2,0],[3,4,0],[
```

```
-4,3,0])&*d);
```
questa è la matrice complessiva che rappresenta la 'viewing pipeline'

```
> trasforma(t0,Vp);
> c:=trasforma(c0,Vp):
```
la 'viewing pipeline' applicata al cubo unitario c0

```
> plots[display](box(c),scaling=CONSTRAINED,view=[500..980,400..700],axes=BOXED);
>
```