2. Coordinate omogenee e trasformazioni del piano

Nella prima sezione si è visto come la composizione di applicazioni lineari e di traslazioni porta ad una scomoda combinazione di prodotti matriciali e di somme di vettori. Utilizzando le *coordinate omogenee* per i punti del piano, la concatenazione di trasformazioni affini si riduce al prodotto di opportune matrici 3x3. Vedremo inoltre che l'uso delle coordinate omogenee non è solo un comodo artificio di calcolo, ma ha un significato geometrico molto più profondo, legato al concetto di *proiezione* e a quello di '*punti all'infinito*'.

2.1 Coordinate omogenee

Chiameremo *coordinate omogenee* di un punto $P = (x, y)$ del piano una qualsiasi terna ordinata (X, Y, Z) di numeri reali tali che $Z \neq 0$ e $\frac{X}{Z} = x$, $\frac{Y}{Z} = y$. Ad esempio, la terna (x, y, 1) e ogni suo multiplo $r\,(x, y, 1) = (r\,x, r\,y, r)$ (quest'ultima proprietà è la 'omogeneità' delle coordinate). Ad esempio, il punto $Q = (3, 2)$ del piano può essere rappresentato da (3, 2, 1) oppure da (6, 4, 2), etc.

Il prodotto matriciale

$$[X_1 \quad Y_1 \quad Z_1] = [X \quad Y \quad Z] \,.\, \begin{bmatrix} a & c & 0 \\ b & d & 0 \\ h & k & 1 \end{bmatrix}$$

equivale alle equazioni in coordinate omogenee

$$X_1 = a\,X + b\,Y + h\,Z, \quad Y_1 = c\,X + d\,Y + k\,Z, \quad Z_1 = Z$$

e in coordinate non omogenee

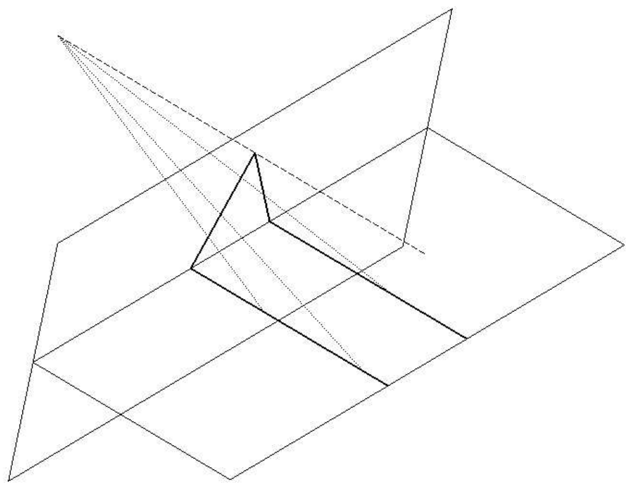
$$x_1 = \frac{X_1}{Z_1} = \frac{a\,X}{Z} + \frac{b\,Y}{Z} + \frac{h\,Z}{Z} = a\,x + b\,y + h \quad \text{e} \quad y_1 = \frac{Y_1}{Z_1} = \frac{c\,X}{Z} + \frac{d\,Y}{Z} + \frac{k\,Z}{Z} = c\,x + d\,y + k.$$

Dunque ogni trasformazione affine del piano può essere espressa mediante un prodotto matriciale con matrici 3x3 della forma scritta sopra. Ad esempio, la traslazione $T_{[2,\,5]}$ si ottiene moltiplicando la terna delle coordinate omogenee per la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

2.2 Punti all'infinito

Due rette parallele contenute in un piano non si incontrano. Se però si considerano le *proiezioni* di due rette parallele su un secondo piano non parallelo al primo (proiettando da un centro C non appartenente ai due piani), allora le rette si intersecano in un punto (per convincersene, basta sedersi 'mentalmente'(!) sui binari della ferrovia...).



Per trattare correttamente i 'punti all'infinito' e le proiezioni tra piani conviene estendere il piano aggiungendo i cosiddetti <u>punti impropri</u>. Scegliamo coordinate X, Y, Z in R^3 e identifichiamo i punti (x, y) del piano cartesiano con i punti $(x, y, 1)$ del piano di equazione $Z = 1$ nello spazio. Ogni punto del piano è in corrispondenza con un'unica retta per l'origine in R^3, la retta che contiene il punto. Chiamiamo <u>*piano proiettivo*</u> P^2 l'insieme delle rette per l'origine di R^3.
Ogni retta per O è identificata da un suo qualsiasi punto (X, Y, Z) distinto da O, cioè con X, Y, Z non tutti nulli. Due terne (X, Y, Z) e (X_1, Y_1, Z_1) individuano lo stesso *'punto' di* P^2 (cioè la stessa retta per O) se e solo se esiste un numero reale non nullo k tale che $X_1 = k\,X$, $Y_1 = k\,Y$, $Z_1 = k\,Z$. Chiameremo (X, Y, Z) *coordinate omogenee* della retta per O, cioè del punto corrispondente di P^2. Ad esempio, (3, 2, 1) e (6, 4, 2) sono coordinate omogenee della retta di equazioni parametriche

$$X = 3\,t,\ Y = 2\,t,\ Z = t$$

che è il punto del piano proiettivo P^2 corrispondente al punto $Q = (3, 2)$ nel piano.
Coordinate omogenee della forma $(X, Y, 0)$ non corrispondono a un punto del piano cartesiano, ma rappresentano i cosiddetti *punti impropri* del piano proiettivo. Ogni punto improprio corrisponde a una *direzione* nel piano cartesiano, quella delle rette parallele alla retta per O di coordinate omogenee $(X, Y, 0)$. Possiamo considerare il punto improprio $(X, Y, 0)$ come il <u>*punto all'infinito*</u> delle rette del piano cartesiano con direzione $v = (X, Y)$. Infatti, la retta del piano passante per (a, b) e con direzione $v = (X, Y)$ ha equazioni parametriche

$$(\mathrm{x}(t), \mathrm{y}(t)) = (a + t\,X,\ b + t\,Y)$$

Il punto $P(t) = (x(t), y(t))$ sulla retta ha coordinate omogenee $\frac{1}{t}$

$(a + t\,X, b + t\,Y, 1) = \left(\frac{a}{t} + X, \frac{b}{t} + Y, \frac{1}{t}\right)$ per $t \neq 0$. Al tendere di t all'infinito, tali coordinate omogenee tendono a quelle del punto improprio $(X, Y, 0)$.

Possiamo dunque considerare il piano proiettivo P^2 come un'estensione del piano cartesiano, al quale vengono aggiunti tutti i punti all'infinito delle rette del piano (uno per ogni famiglia di rette parallele).

Ogni retta l del piano cartesiano, considerata come sottoinsieme di P^2, contiene un punto improprio, l'unica retta per O parallela a l. Se l ha equazione

$$a\,x + b\,y + c = 0,$$

in coordinate omogenee ha equazione

$\frac{a\,X}{Z} + \frac{b\,Y}{Z} + c = 0$, ovvero $a\,X + b\,Y + c\,Z = 0$ (i punti (X, Y, Z) dello spazio formano un piano per l'origine in R^3)

Il suo punto improprio si ottiene ponendo $Z = 0$: ha coordinate omogenee $(b, -a, 0)$, corrispondente al vettore direzione $v = (b, -a)$. Ogni retta parallela a l ha equazione cartesiana della forma $a\,x + b\,y + d = 0$, e quindi $a\,X + b\,Y + c\,Z = 0$ in coordinate omogenee. Due rette parallele hanno sempre intersezione nel punto improprio $(b, -a, 0)$.

Esempio: le rette $3\,x + 6\,y + 4 = 0$ e $x + 2\,y + 4 = 0$ hanno punto improprio $(6, -3, 0) = (2, -1, 0)$. Sono quindi rette parallele del piano cartesiano.

2.3 Trasformazioni del piano in coordinate omogenee

Come si è visto in 2.1, ogni trasformazione affine del piano può essere ottenuta mediante un prodotto matriciale con matrici 3x3. Una conseguenza di questo fatto è che alla concatenazione di trasformazioni corrisponde il prodotto delle matrici 3x3 e che la trasformazione inversa è rappresentata dalla matrice inversa (quando esiste). Se

$$[X_1 \quad Y_1 \quad Z_1] = [X \quad Y \quad Z] \,.\, A \quad \text{e} \quad [X_2 \quad Y_2 \quad Z_2] = [X_1 \quad Y_1 \quad Z_1] \,.\, B$$

con $A = \begin{bmatrix} a & c & 0 \\ b & d & 0 \\ h & k & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} a_1 & c_1 & 0 \\ b_1 & d_1 & 0 \\ l & m & 1 \end{bmatrix}$, allora $[X_2 \quad Y_2 \quad Z_2] = [X \quad Y \quad Z] \,.\, (A\,B)$.

Dunque la concatenazione $T\,S$ di due trasformazioni affini si ottiene mediante la matrice prodotto $A\,B$ (nello stesso ordine). Inoltre $T\,S = Id$ e $S\,T = Id$ se e solo se $A\,B = I_3$ e $B\,A = I_3$, cioè A è invertibile con inversa B. Questo avviene quando $\det(A) \neq 0$, determinante che coincide col determinante $a\,d - b\,c$ della matrice 2x2 associata alla componente lineare di T.

Vediamo ora, per le varie classi di trasformazioni che ci interessano, l'espressione in coordinate omogenee.

Traslazioni

La matrice 3x3

$$T(h, k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ h & k & 1 \end{bmatrix}$$

rappresenta la traslazione definita dal vettore $v_0 = (h, k)$. Infatti

$$[x \quad y \quad 1] \,.\, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ h & k & 1 \end{bmatrix} = [x+h \quad y+k \quad 1]$$

Esempio

```
> with(linalg):
> figura:=matrix([[1,1],[3,1],[1.8,2],[1.5,3],[1,1]]);
> disegno:=f->plot(convert(f,listlist),view=[-6..6,-6..6]
,scaling=CONSTRAINED,style=LINE):
> trasforma:=(f,m)->delcols(evalm(augment(f,vector(rowdim
(f),1))&*m),rowdim(m)..rowdim(m)):
```

la funzione che esegue la trasformazione è modificata per usare le coordinate omogenee

```
> T:=(h,k)->matrix(3,3,[[1,0,0],[0,1,0],[h,k,1]]):
> f1:=trasforma(figura,T(2,1));
> disegni:=l->plots[display](map(disegno,l)):
> disegni({figura, f1});
>
```

Cambiamenti di scala

La matrice che rappresenta il cambiamento di scala centrato nell'origine, con fattori s_x e s_y è la matrice diagonale

$$S(s_x, s_y) = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Esempio

```
> S:=(sx,sy)->matrix(3,3,[[sx,0,0],[0,sy,0],[0,0,1]]):
> disegni({figura,trasforma(figura,S(2,1))});
>
```

Rotazioni

Per le rotazioni attorno all'origine la matrice è

$$Rot_0(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Per le rotazioni attorno a un punto qualsiasi $P_0 = (x_0, y_0)$ bisogna comporre con due traslazioni per portare P_0 nell'origine

$$Rot_{x_0, y_0}(\theta) = T(-x_0, -y_0)\, Rot_0(\theta)\, T(x_0, y_0)$$

Esempio

```
> Rot:=(x0,y0,t)->T(-x0,-y0)&*matrix(3,3,[cos(t),sin(t),0
,-sin(t),cos(t),0,0,0,1])&*T(x0,y0):
> f1:=trasforma(figura,Rot(1,1,Pi/2));
> disegni({figura,f1});
>
```

Riflessione rispetto a una retta

La riflessione rispetto alla retta r di equazioni parametriche $P(t) = P_0 + t\, v$ (con v unitario:

${v_1}^2 + {v_2}^2 = 1$) viene ricondotta alla riflessione rispetto all'asse x componendo la traslazione $T(-x_0, -y_0)$, che porta P_0 nell'origine, con la rotazione attorno all'origine dell'angolo $-\theta$, dove θ è l'angolo che la retta forma con l'asse positivo delle x. Dopo aver eseguito la riflessione R_x, è sufficiente comporre con le trasformazioni inverse della rotazione e della traslazione per ottenere la riflessione rispetto a r.

Dunque $R = T_{[-x_0, -y_0]}\, Rot_{0,0}(-\theta)\, S(1, -1)\, Rot_{0,0}(\theta)\, T_{[x_0, y_0]}$

L'angolo θ è caratterizzato dalle condizioni $\cos(\theta) = v_1$, $\sin(\theta) = v_2$. Quindi la matrice $Rot_{0,0}(-\theta)$ della rotazione è

$$\begin{bmatrix} v_1 & -v_2 & 0 \\ v_2 & v_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e quindi la matrice associata alla riflessione è il prodotto

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -x_0 & -y_0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 & -v_2 & 0 \\ v_2 & v_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & 0 \\ -v_2 & v_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x_0 & y_0 & 1 \end{bmatrix}$$

cioè la matrice

$$\begin{bmatrix} {v_1}^2 - {v_2}^2 & 2\, v_1\, v_2 & 0 \\ 2\, v_1\, v_2 & {v_2}^2 - {v_1}^2 & 0 \\ 2\, v_2\, (x_0\, v_2 - y_0\, v_1) & 2\, v_1\, (-x_0\, v_2 + y_0\, v_1) & 1 \end{bmatrix}$$

.

```
> m:=evalm(T(-x[0],-y[0])&*matrix(3,3,[v[1],-v[2],0,v[2],
  v[1],0,0,0,1])&*S(1,-1)&*matrix(3,3,[v[1],v[2],0,-v[2],
  v[1],0,0,0,1])&*T(x[0],y[0]));
```

Per ottenere la matrice della riflessione a partire dai coefficienti a, b, c di un'equazione cartesiana $a\,x + b\,y + c = 0$ di r, basta fare le sostituzioni

$$v_1 = -\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}},\ v_2 = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}},\ -v_2\, x_0 + v_1\, y_0 = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

e ottenere la matrice

$$R_{a,b,c} = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{bmatrix} b^2 - a^2 & -2\,a\,b & 0 \\ -2\,a\,b & a^2 - b^2 & 0 \\ -2\,a\,c & -2\,b\,c & a^2 + b^2 \end{bmatrix}$$

.

```
> simplify(subs({v[1]=-b/sqrt(a^2+b^2),v[2]=a/sqrt(a^2+b^
  2),-v[2]*x[0]+v[1]*y[0]=c/sqrt(a^2+b^2)},evalm(m)));
```

Esempio

```
> R:=(a,b,c)->matrix(3,3,[[b^2-a^2,-2*a*b,0],[-2*a*b,a^2-
```

```
b^2,0],[-2*a*c,-2*b*c,a^2+b^2]])/(a^2+b^2):
> disegni({figura,trasforma(figura,R(1,1,-2))});
>
```

Tagli

La matrice è

$$\begin{bmatrix} 1 - r\, v_1\, v_2 & -r\, v_2^{\,2} & 0 \\ r\, v_1^{\,2} & 1 + r\, v_1\, v_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Esempio

```
> Sh:=(v,r)->matrix(3,3,[[1-r*v[1]*v[2],-r*v[2]^2,0],[r*v
  [1]^2,1+r*v[1]*v[2],0],[0,0,1]]):
> t0:=[[0,0],[3,0],[0,3],[0,0]]:disegno(t0);
> t1:=trasforma(t0,Sh([1,0],1/2));
> disegno(t1);
>
```

Applicazione: costruzione di oggetti geometrici mediante 'istanze'

Esempio: Utilizziamo due elementi grafici, un quadrato di lato 1 e un triangolo isoscele di cateto 1, per costruire un oggetto geometrico più complicato, mediante 7 istanze del primo elemento e una istanza del secondo.

Si osservi che l'applicazione di una trasformazione a un elemento grafico, ad esempio un quadrato definito come lista dei suoi vertici, si ottiene moltiplicando la matrice che ha righe le coordinate omogenee dei vertici (con ultima riga uguale alla prima per 'chiudere' la figura) per la matrice 3x3 che descrive la trasformazione. Ad esempio:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{9}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{11}{2} & 1 & 1 \\ \frac{11}{2} & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

esegue un cambiamento di scala e una traslazione sul quadrato con lati i vettori $[1, 0]$ e $[0, 1]$. Il quadrato trasformato è il rettangolo di vertici $[1, 1]$, $\left[\frac{11}{2}, 1\right]$, $\left[\frac{11}{2}, 4\right]$, $[1, 4]$.

Esempio

```
> q0:=[[0,0],[1,0],[1,1],[0,1],[0,0]]:t0:=[[0,0],[1,0],[0,1]
  ,[0,0]]:
> cosa:={trasforma(q0,S(9/2,3)&*T(1,1)),trasforma(q0,S(1,1/2
  )&*T(3/2,3/2)),trasforma(q0,S(1,1/2)&*T(4,3/2)),trasforma(
  q0,S(1,1/2)&*T(3/2,3)),trasforma(q0,S(1,1/2)&*T(4,3)),tras
  forma(q0,S(1/2,1)&*T(3,1)),trasforma(q0,S(1/10,1/20)&*T(3.
  1,1.4)),trasforma(t0,Sh([1,0],1/2)&*S(9/2,1)&*T(1,4))}:
> disegni(cosa);
```

\>

2.4 Rette e punti in coordinate omogenee

Abbiamo visto in 2.2 che una retta l nel piano cartesiano, di equazione $a\,x + b\,y + c = 0$, ha equazione $a\,X + b\,Y + c\,Z = 0$ in coordinate omogenee. Tale retta è individuata dalla terna a, b, c o da un qualunque suo multiplo $t\,a, t\,b, t\,c$ con $t \neq 0$. Possiamo quindi parlare delle *coordinate omogenee della retta*

$$l = (a, b, c)$$

e scrivere l'equazione omogenea di l come prodotto scalare (in R^3) tra il vettore delle coordinate omogenee $P = (X, Y, Z)$ del punto e il vettore delle coordinate omogenee $l = (a, b, c)$ della retta:

$$P \,.\, l = a\,X + b\,Y + c\,Z = 0$$

Possiamo applicare questa identità per risolvere facilmente i due seguenti problemi:

1) trovare l'equazione della retta per due punti:

l è la retta per due punti distinti $P_1 = (X_1, Y_1, Z_1)$ e $P_2 = (X_2, Y_2, Z_2)$ se $P_1 \,.\, l = 0$ e $P_2 \,.\, l = 0$. Dunque il vettore delle coordinate omogenee di l deve essere ortogonale (in R^3) a P_1 e a P_2. Si può prendere ad esempio il prodotto vettoriale

$$l = P_1 \times P_2 = (Y_1\,Z_2 - Y_2\,Z_1, Z_1\,X_2 - Z_2\,X_1, X_1\,Y_2 - X_2\,Y_1)$$

Esempio: la retta per i punti (2, 3) e (4, 2) ha coordinate omogenee $l = (1, 2, -8)$ e quindi ha equazione cartesiana $x + 2\,y - 8 = 0$.

2) trovare il punto di intersezione di due rette:

P è il punto di intersezione di due rette l_1 e l_2 se $l_1 \,.\, P = 0$ e $l_2 \,.\, P = 0$. Dunque si può prendere il prodotto vettoriale

$$P = l_1 \times l_2$$

Esempio: le rette $x + y + 1 = 0$ e $2\,x - 3\,y - 4 = 0$ si intersecano nel punto di coordinate omogenee $P = (-1, 6, -5)$, cioè nel punto di coordinate cartesiane $\left[\frac{1}{5}, -\frac{6}{5}\right]$

Se le rette sono parallele, si ottiene il punto improprio delle due rette.

Esercizio 1: mostrare che tre punti P_1, P_2, P_3 sono *allineati* se e solo se è nullo il determinante della matrice

$$\begin{bmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{bmatrix}$$

ottenuta dalle coordinate omogenee dei 3 punti. Questa osservazione permette di scrivere l'equazione omogenea della retta per due punti distinti P_1 e P_2 come determinante:

$$\det\left(\begin{bmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X & Y & Z \end{bmatrix}\right) = 0$$

Esercizio 2: mostrare che tre rette l_1, l_2, l_3 sono *concorrenti* (cioè si intersecano in un punto) se e solo se è nullo il determinante della matrice

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

ottenuta dalle coordinate omogenee delle 3 rette.