ESERCIZI PER CASA – NONA E DECIMA SETTIMANA

Università degli Studi di Trento – Corso di Laurea in Matematica
Corso di Teoria dei Gruppi – A.A. 2008/09
29 aprile 2009

Gruppo (generalizzato) dei quaternioni. Sia n pari, e considerate il gruppo
$$Q_n = \langle x, a \mid a^n = 1,\ x^2 = a^{n/2},\ xax^{-1} = a^{-1} \rangle,$$
detto gruppo dei quaternioni quando $n = 4$, e generalizzato in altri casi. [1]

(1) Dimostrate che G ha al massimo $2n$ elementi.

(2) Dimostrate che G ha esattamente $2n$ elementi.

(3) Determinate il centro di Q_n.

(4) Calcolate quanti elementi di ordine 2 ci sono in Q_n. Deducetene che $Q_n \not\cong D_n$ (per n pari maggiore di 2). Ricordo che
$$D_n = \langle x, a \mid a^n = 1,\ x^2 = 1,\ xax^{-1} = a^{-1} \rangle.$$

(5) Scrivete la tabella di moltiplicazione di Q_4, e quella di D_4

[*Suggerimento:* (1) Esibite un insieme S di $2n$ parole in x e a, e mostrate che un'arbitraria parola è equivalente ad una di queste modulo le relazioni. (2) Mostrate che *non sono possibili ulteriori semplificazioni,* cioè che due distinte parole in S non possono essere equivalenti. Equivalentemente, bisogna mostrare che, data una parola arbitraria w, la parola $w_0 \in S$ a cui essa è equivalente modulo le relazioni è unicamente determinata. Una strada per farlo e' trovare un modo per dedurre w_0 in modo univoco da w, senza eseguire tutti i passaggi.]

Gruppi lineari. Per quali valori di n e q il gruppo $\mathrm{GL}(n, \mathbb{F}_q)$ è il prodotto diretto del suo centro e del suo sottogruppo $\mathrm{SL}(n, \mathbb{F}_q)$?

Il gruppo $\mathrm{AGL}(1, \mathbb{F}_4)$ è isomorfo ad A_4. Il $\mathrm{AGL}(1, \mathbb{F}_4)$, che è il gruppo delle trasformazioni affini della retta su $\mathbb{F}_4$, agisce naturalmente sui quattro punti della retta (cioè su $\mathbb{F}_4$). Mostrate che questa azione è (transitiva e) fedele, e deducetene che $\mathrm{AGL}(1, \mathbb{F}_4)$ è isomorfo al gruppo alterno A_4.

[*Suggerimento:* Per chi non avesse studiato i campi finiti, il campo con quattro elementi $\mathbb{F}_4$ consiste, un po' alla buona, dei quattro simboli $0, 1, \alpha, 1 + \alpha$, che si addizionano come polinomi in α ma riducendo i coefficienti modulo 2, e che si moltiplicano come polinomi in α (sempre riducendo i coefficienti modulo 2), ma effettuando la sostituzione $\alpha^2 = \alpha + 1$ quando possibile. Ad esempio, $\alpha + (1+\alpha) = 1 + 2\alpha = 1$, e $(1+\alpha)^2 \cdot \alpha = (1+\alpha^2) \cdot \alpha = (1+1+\alpha) \cdot \alpha = \alpha^2 = 1+\alpha$.

Usando l'azione ottenete un omomorfismo iniettivo in S_4, e l'immagine ha lo stesso ordine di A_4. Ora, o usate il fatto che S_4 ha un solo sottogruppo di indice due, oppure verificate direttamente che ogni trasformazione affine della retta su $\mathbb{F}_4$ (cioè ogni elemento di $\mathrm{AGL}(1, \mathbb{F}_4)$) agisce su $\mathbb{F}_4$ come una permutazione pari.]

[1] La notazione per questo gruppo Q_n è variabile a seconda delle fonti, può anche scriversi Q_{2n} con riferimento al suo ordine, o addirittura $Q_{n/2}$ altrove.

Il gruppo $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{F}_3)$ **è isomorfo a** S_4**.** (1) Sia $G = \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$ il gruppo delle matrici invertibili 2×2 a coefficienti nel campo con tre elementi $\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. (Per semplicità indichiamo gli elementi di $\mathbb{F}_3$ con $0, 1, -1$, piuttosto che $\bar{0} = 0 + 3\mathbb{Z}$, ecc.) Considerate l'azione naturale di G sull'insieme $\Omega = {\mathbb{F}_3}^2 \setminus \{(0, 0)^\intercal\}$ dei vettori colonna non nulli, a coefficienti in $\mathbb{F}_3$. Considerate l'azione *naturale* di G su Ω, cioè quella dove vg è definito come il prodotto del vettore riga $v \in \Omega$ per la matrice $g \in G$. Mostrate che tale azione è transitiva e fedele, ottenendone quindi un omomorfismo iniettivo $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3) \to S_8$.

(2) Ora sia $P^1\mathbb{F}_3$ lo spazio proiettivo associato allo spazio vettoriale $\mathbb{F}_3^2$ (cioè la *retta proiettiva* su $\mathbb{F}_3$). Dunque i suoi elementi sono le rette per l'origine in $\mathbb{F}_3^2$, ovvero (togliendo loro l'origine, che è comune a tutte) le coppie di elementi opposti di Ω. Mostrate che l'azione di G su Ω induce un'azione di G su $P^1\mathbb{F}_3$. (Bisogna mostrare che l'azione di G manda elementi di $P^1\mathbb{F}_3$ in elementi di $P^1\mathbb{F}_3$). Mostrate che il nucleo di questa seconda azione è il centro Z di G (cioè l'insieme delle matrici scalari di G). Deducetene che il gruppo lineare proiettivo $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{F}_3) = \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)/Z$ è isomorfo al gruppo simmetrico S_4.