ESERCIZI PER CASA – OTTAVA SETTIMANA

Università degli Studi di Trento – Corso di Laurea in Matematica
Corso di Teoria dei Gruppi – A.A. 2008/09
9 aprile 2009

Sottogruppi di S_n con indice piccolo. Usando l'azione per moltiplicazione sui laterali sinistri di un sottogruppo e fatti noti su S_n, mostrate che per $n \geq 5$ gli unici sottogruppi di S_n di indice minore di n sono S_n e A_n. [1]

[*Suggerimento:* Sia $G = S_n$ e H un suo sottogruppo con $|G : H| < n$. Usando l'azione di G per traslazione sinistra sull'insieme G/H costruite un opportuno sottogruppo normale di G, e usate il fatto (che avete dimostrato solo per $n = 5$ in un precedente esercizio) che se $n \geq 5$ i soli sottogruppi normali di S_n sono 1, A_n e S_n.]

Gruppi di esponente primo. Sia p un numero primo, e sia G un gruppo abeliano di *esponente* p, cioè tale che $g^p = 1$ per ogni $g \in G$. Essendo G abeliano, è naturale usare la notazione additiva per la sua operazione; quindi $pg := g + g + \cdots + g = 0$ (con p addendi) per ogni $g \in G$.

(1) Mostrate che G si può considerare, in modo naturale, uno spazio vettoriale sul campo con p elementi $\mathbb{F}_p := \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

(2) Mostrate che se G è un gruppo abeliano *finito* di esponente p allora il suo ordine è una potenza di p.

(3) Mostrate che ogni gruppo di esponente 2 è abeliano. [2]

[*Suggerimento:* (1) Definite la moltiplicazione di un elemento $g \in G$ per uno scalare in $\mathbb{F}_p$ nell'unico modo possibile, mostrando che è ben definita e facendo le altre verifiche del caso.
(2) Applicate le vostre conoscenze di Algebra Lineare.
(3) Se $g, h \in G$ allora $g^2 = 1$ (cioè $g^{-1} = g$), $h^2 = 1$, e $(gh)^2 = 1$. Deducetene che $gh = hg$.]

I gruppi di ordine 6 sono quello ciclico e S_3. Dimostratelo, seguendo e giustificando i passaggi seguenti.

(1) Sia G un gruppo di ordine 6. Grazie al teorema di Lagrange, i suoi elementi possono solo avere ordine $1, 2, 3$ o 6. Se G ha un elemento di ordine 6, allora G è ciclico. Ora supponete il contrario. Mostrate che gli elementi di G diversi da 1 non possono avere tutti lo stesso ordine (usando l'esercizio precedente per l'ordine 2), e quindi G ha almeno un elemento h di ordine 2 ed uno k di ordine 3.

(2) Ponete $H = \langle h \rangle$ e $K = \langle k \rangle$. Allora K è un sottogruppo normale di G. Considerate l'azione di G per moltiplicazione (a sinistra) sull'insieme G/H dei tre laterali sinistri di H. Vi è associato un omomorfismo $G \to \mathrm{Sym}(G/H) \cong S_3$. Il nucleo è l'intersezione dei coniugati di H, quindi ha ordine 2 o 1. Mostrate che nel primo caso, cioè se H è un sottogruppo normale di G, allora G è (abeliano, e quindi) ciclico, in contraddizione con quanto assunto. Ne segue che l'omomorfismo è iniettivo, e quindi $G \cong S_3$.

---

[1] Per $n = 4$ l'affermazione non vale, perché S_4 ha anche un sottogruppo di indice 3, il gruppo diedrale D_4. In generale poi S_n ha un sottogruppo isomorfo a S_{n-1}, ad esempio lo stabilizzatore della cifra n nell'azione naturale; tale sottogruppo ha indice n.

[2] L'affermazione analoga non vale per $p > 2$.