ESERCIZI PER CASA – SESTA E SETTIMA SETTIMANA

Università degli Studi di Trento – Corso di Laurea in Matematica
Corso di Teoria dei Gruppi – A.A. 2008/09
2 aprile 2009

Prodotti diretti (interni). (1) Esprimete ciascuno dei seguenti gruppi (abeliani) come prodotto diretto di due sottogruppi propri (cioè diversi dall'intero gruppo): $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ (le classi resto modulo 15, con l'addizione); $\mathbb{C}^*$ (i complessi non nulli, con la moltiplicazione); $\mathbb{Q}^*$ (i numeri razionali non nulli, con la moltiplicazione).

(2) Spiegate perché $\mathbb{Z}$ (il gruppo degli interi, con l'addizione) non può essere il prodotto diretto di due sottogruppi propri.

[*Suggerimento:* Per $\mathbb{Q}^*$ usate la fattorizzazione unica di un numero intero, e quindi anche di un numero razionale. Per $\mathbb{Z}$ ricordate quali sono i suoi sottogruppi.]

Gruppi di ordine p^2. (1) Sia G un gruppo e $\mathbf{Z}(G)$ il suo centro. Mostrate che se $G/\mathbf{Z}(G)$ è ciclico, allora $\mathbf{Z}(G) = G$.

(2) Mostrate che ogni gruppo di ordine p^2, dove p è un primo, è abeliano.

[*Suggerimento:* (1) Se $G/\mathbf{Z}(G)$ è generato dall'elemento $\bar{a}$, quindi $\bar{a} = a\mathbf{Z}(G)$ per un certo $a \in G$, segue che ogni elemento di G si può scrivere nella forma $a^i z$, con $i \in \mathbb{Z}$ e $z \in \mathbf{Z}(G)$. Rimane solo da controllare che elementi di questa forma commutino.

(2) Usate il fatto che p-gruppi non banali hanno centro non banale, e la prima parte dell'esercizio.]

Classi di coniugio di D_n per n pari. Analogamente al caso n dispari visto a lezione, determinate le classi di coniugio del gruppo diedrale D_n (gruppo delle simmetrie di un n-agono regolare) per n pari.

[*Suggerimento:* Notate che in questo caso D_n ha centro non banale, e che le riflessioni formano due classi di coniugio distinte. (Infatti una di esse consiste delle riflessioni di asse passante per due vertici opposti, mentre l'altra consiste delle riflessioni di asse passante per i punti medi di lati opposti; le prime non possono essere coniugate alle seconde!) Ad esempio, coniugando l'elemento b otteniamo $a^k b a^{-k} = a^{2k} b$, che sono soltanto $n/2$ elementi, perché n è pari. Quindi la classe di coniugio di b è lunga almeno n. Potete verificare che è lunga esattamente n notando che vale anche $(a^k b) b (a^k b)^{-1} = (a^k b) b (b^{-1} a^{-k}) = a^{2k} b$, oppure, ancor meglio, notando che il centralizzante di b contiene almeno i quattro elementi $1, b, a^{n/2}, a^{n/2} b$ e usando il teorema orbita-stabilizzatore. Complessivamente troverete $(n/2) + 3$ classi di coniugio.]

Conteggio di orbite, 1. Calcolate il numero di collane distinte che si possono formare con 6 palline bianche e 2 nere.

Conteggio di orbite, 2. Supponete di voler costruire delle "carte di identità" utilizzando dei quadrati di plastica, con facce indistinguibili, su ciascuna delle quali è disegnata una griglia 3×3. Ogni carta di identità è realizzata praticando due fori su ciascun quadrato, al centro di due quadrati a scelta della griglia. Determinate il numero di possibili carte di identità distinte ottenibili in questo modo (cioè a meno di rotazioni e riflessioni).