

DIARIO DEL CORSO DI TEORIA DEI GRUPPI

SANDRO MATTAREI

A.A. 2008/09

PRIMA SETTIMANA. LEZIONE DI MERCOLEDÍ 18 FEBBRAIO 2009 (UN'ORA)

Permutazioni: notazione, interpretazione, decomposizione in prodotto di cicli disgiunti. Il gruppo simmetrico S_n .

LEZIONE DI GIOVEDÍ 19 FEBBRAIO 2009 (DUE ORE)

Introduzione al corso.

Elementi coniugati. Coniugio nei gruppi di permutazione.

Segno di una permutazione (cioè permutazioni pari e dispari). Il gruppo alterno A_n .

SECONDA SETTIMANA. LEZIONE DI MERCOLEDÍ 25 FEBBRAIO 2009 (UN'ORA)

Applicazione del segno di una permutazione al “gioco del 15”.

Gruppi di permutazione e gruppi astratti. Sottogruppi, laterali e teorema di Lagrange. Corrispondenza fra laterali sinistri e destri.

LEZIONE DI GIOVEDÍ 26 FEBBRAIO 2009 (DUE ORE)

Sottogruppi normali. Gruppo quoziente. Teorema fondamentale sugli omomorfismi.

Azione di un gruppo su un insieme. Orbite e stabilizzatori. Il teorema orbita-stabilizzatore.

TERZA SETTIMANA. LEZIONE DI MERCOLEDÍ 4 MARZO 2009 (UN'ORA)

Gli stabilizzatori di punti di una stessa orbita sono coniugati.

Esempi di azioni.

L'azione per coniugio. Classi di coniugio, centralizzanti, centro. L'equazione delle classi.

Un p -gruppo non banale ha centro non banale.

LEZIONE DI GIOVEDÍ 5 MARZO 2009 (DUE ORE)

Orbite e centralizzanti in S_n .

Esercizio: tutto quanto imparato applicato a S_3 .

Automorfismi interni. L'isomorfismo $\text{Inn}(G) \cong G/Z$.

Restrizione di un'azione a un sottogruppo.

Relazione fra le classi di coniugio di un gruppo e di un suo sottogruppo normale.

Date: Aggiornato al 11 maggio 2009.

QUARTA SETTIMANA. LEZIONE DI MERCOLEDÌ 11 MARZO 2009 (UN'ORA)

Continuazione: la classe di coniugio in G di un elemento di un sottogruppo normale N di G si spezza in $|G : N C_G(g)|$ classi di N .

Esempio: le classi di coniugio di S_4 e quelle di A_4 .

Gli elementi di S_4 come simmetrie del tetraedro.

LEZIONE DI GIOVEDÌ 12 MARZO 2009 (DUE ORE)

Esempio: le classi di coniugio di S_5 e quelle di A_5 . Semplicità di A_5 .

Due dei tre teoremi di isomorfismo per i gruppi (il teorema fondamentale, e $HN/N \cong H/H \cap N$).

Prodotto diretto di gruppi (interno ed esterno).

QUINTA SETTIMANA. LEZIONE DI MERCOLEDÌ 18 MARZO 2009 (UN'ORA)

I cinque poliedri regolari (cioè i solidi Platonici) ed i loro gruppi di simmetrie.

LEZIONE DI GIOVEDÌ 19 MARZO 2009 (DUE ORE)

Il gruppo delle simmetrie del cubo. Varie azioni associate. L'omomorfismo di S_4 su S_3 .

SESTA SETTIMANA. LEZIONE DI GIOVEDÌ 26 MARZO 2009 (DUE ORE)

Il gruppo delle simmetrie del dodecaedro. Varie azioni associate. Nuova verifica (geometrica) che gli elementi di ordine 5 in A_5 si dividono in due classi di coniugio. In A_6 ci sono due sottogruppi isomorfi ad A_5 ma non coniugati fra loro.

SETTIMA SETTIMANA. LEZIONE DI GIOVEDÌ 2 APRILE 2009 (DUE ORE)

L'azione di A_6 sui dieci tetraedri inscritti nel dodecaedro.

Il carattere di un'azione. Il Lemma di Cauchy-Frobenius.

OTTAVA SETTIMANA. LEZIONE DI MERCOLEDÌ 8 APRILE 2009 (UN'ORA)

Applicazione delle azioni a problemi di conteggio: le classi di isomorfismo dei grafi su 4 vertici.

LEZIONE DI GIOVEDÌ 9 APRILE 2009 (DUE ORE)

Il gruppo diedrale D_n e le sue classi di coniugio (per n dispari; il caso n pari per esercizio).

Cenni a gruppi liberi e presentazioni di gruppi.

Applicazione delle azioni a problemi di conteggio: il numero di collane distinte fatte di 6 perline nere e 3 bianche.

NONA SETTIMANA. LEZIONE DI MERCOLEDÌ 15 APRILE 2009 (DUE ORE)

L'azione regolare (cioè l'azione di G su se stesso per moltiplicazione a sinistra).
Il teorema di Cayley.

Azione per moltiplicazione sull'insieme dei laterali sinistri di un sottogruppo. Il cuore di un sottogruppo.

Prodotti semidiretti. Esempi.

LEZIONE DI GIOVEDÌ 16 APRILE 2009 (DUE ORE)

Gruppi di ordine pq .

Gruppi liberi. Gruppi abeliani liberi. Presentazioni.

DECIMA SETTIMANA. LEZIONE DI MERCOLEDÌ 22 APRILE 2009 (DUE ORE)

Esempi di presentazioni: i gruppi diedrali, i gruppi simmetrici.

Equivalenza di azioni. Ogni azione transitiva è equivalente all'azione sull'insieme dei laterali sinistri di un sottogruppo.

LEZIONE DI GIOVEDÌ 23 APRILE 2009 (DUE ORE)

Gruppi lineari e lineari proiettivi.

UNDICESIMA SETTIMANA. LEZIONE DI MARTEDÌ 28 APRILE 2009 (DUE ORE)

Ordini dei gruppi lineari e lineari proiettivi su un campo finito. Alcuni isomorfismi fra loro e con gruppi alterni.

LEZIONE DI MERCOLEDÌ 27 APRILE 2009 (DUE ORE)

I teoremi di Sylow: enunciati ed esempi (S_4 e A_5).

Il lemma di Cauchy come conseguenza. Un p -gruppo finito ha ordine una potenza di p .

Se $|G| = p^m r$ con p primo che non divide r , allora G ha almeno un p -sottogruppo di Sylow (cioè un sottogruppo di ordine p^m).

LEZIONE DI GIOVEDÌ 28 APRILE 2009 (DUE ORE)

Dimostrazione delle altre parti dei teoremi di Sylow: i p -sottogruppi di Sylow sono tutti coniugati; il loro numero n_p è congruo a 1 modulo p ; ogni p -sottogruppo è contenuto in un p -sottogruppo di Sylow.

DODICESIMA SETTIMANA. LEZIONE DI MARTEDÌ 5 MAGGIO 2009 (DUE ORE)

Dimostrazione che $\binom{p^m r}{p^m} \equiv r \pmod{p}$. Il teorema di Lucas.

Un gruppo di ordine pq , p^2q o pqr , con p , q , r primi distinti, non può essere semplice non abeliano.

Se G è semplice non abeliano e $H < G$ allora $|G : H| \geq 5$. Quindi un gruppo di ordine $2p^a$, $3p^a$ o $4p^a$ non può essere semplice non abeliano.

LEZIONE DI MERCOLEDÌ 6 MAGGIO 2009 (DUE ORE)

Il teorema di corrispondenza (o terzo teorema di isomorfismo). Serie di un gruppo. Gruppi risolubili.

L'ordine di un gruppo semplice non abeliano non può essere il doppio di un numero dispari.

LEZIONE DI GIOVEDÌ 7 MAGGIO 2009 (DUE ORE)

Conclusione della dimostrazione che 60 è l'unico possibile ordine che non superi 100 per un gruppo semplice non abeliano.

Ogni gruppo semplice di ordine 60 è isomorfo ad A_5 .

Discussione informale sulla classificazione dei gruppi semplici finiti.