Matematica Discreta (II modulo)

Terzo appello, a.a. 2004/2005 — compito 1

7 settembre 2005

Da svolgersi in tre ore. Al candidato si richiede di svolgere almeno un esercizio di ciascuno dei due gruppi e di rispondere ad almeno una delle domande teoriche. **Tutte le risposte devono essere motivate**.

Non è ammessa la consultazione di libri e/o appunti.

Esercizio 1 Determinare tutte le soluzioni della congruenza $x^7 \equiv 4 \mod 25$ e dire se il sistema di congruenze

$$\begin{cases} x^7 \equiv 4 & \mod 25 \\ x \equiv 16 & \mod 45 \end{cases}$$

ammette soluzioni oppure no.

Esercizio 2 Siano $A = \mathbb{Z}/_{14\mathbb{Z}}$ e $B = (\mathbb{Z}/_{14\mathbb{Z}})^*$. Si calcolino le cardinalità dei seguenti insiemi:

1. $\mathcal{X}_1 = \{C \in 2^A \mid |C \cap B| = 4\}$;
2. $\mathcal{X}_2 = \{f \in A^A \mid f(B) = B\}$;
3. $\mathcal{X}_3 = \{f \in A^A \mid f(B) = B \text{ e } f \text{ è iniettiva}\}$.

Esercizio 3 Dire, motivando la risposta, quale dei vettori

$$d_1 = (1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 4) \qquad d_2 = (1, 3, 3, 3, 4, 4, 6, 7, 8)$$

è lo score di un grafo e quando ciò è possibile costruire un tale grafo. Si dica inoltre se è possibile trovare un tale grafo che sia anche

1. un albero;
2. connesso;
3. sconnesso.

Esercizio 4 Si provi che in ogni albero con 10 vertici dei quali 7 siano di grado 1 esiste almeno un vertice di grado maggiore o uguale a 4.

Domanda di teoria 1. Dare la definizione di numero primo e provare che p è primo se e solo se

$$\forall\, a, b \in \mathbb{Z} \quad p \mid ab \implies p \mid a \text{ o } p \mid b.$$

Domanda di teoria 2. Si diano le definizioni di passeggiata, cammino e di grafo connesso. Si provi che in un grafo due vertici sono congiungibili con una passeggiata se e solo se sono congiungibili con un cammino.

Soluzione dell'esercizio 1 $(4,25)=1$ quindi 4 è invertibile $\mod 25$. Inoltre $\Phi(25)=20$ e $(7,20)=1$, quindi la congruenza è risolubile. Un inverso di 7 $\mod 20$ è dato da 3 e quindi le soluzioni della congruenza sono date da $\left[4^3\right]_{25}=[14]_{25}$.

Il sistema è quindi equivalente a

$$\begin{cases} x \equiv 14 & \mod 25 \\ x \equiv 16 & \mod 45 \end{cases}$$

che non ha soluzione dato che $(25,45)=5 \not| 2 = 16-14$. ❑

Soluzione dell'esercizio 2 Osserviamo innanzittutto che $|A|=14$ e $|B|=\Phi(14)=6$.

(1). Dare $C \in \mathcal{X}_1$ equivale a dare un sottinsieme di B con 4 elementi e un sottinsieme di $A \setminus B$. Formalmente la funzione $\psi : \mathcal{X}_1 \to \binom{B}{4} \times 2^{A\setminus B}$ definita da $\psi(C)=(C\cap B, C\setminus B)$ è una bigezione (l'inversa è data da $\varphi(X,Y)=X\cup Y$). Ma allora $|\mathcal{X}_1| = \left|\binom{B}{4}\times 2^{A\setminus B}\right| = \binom{6}{4}2^8 = 15\cdot 256 = 3840$.

(2). Se X è un insieme, denotiamo con S_X l'insieme delle permutazioni di X (i.e. $S_X = \{g \in X^X \mid g$ è bigettiva).

Dare $f \in \mathcal{X}_2$ equivale a dare due funzioni $f_1 : B \to B$ bigettiva e $f_2 : A\setminus B \to A$. Formalmente l'applicazione $\psi : \mathcal{X}_2 \to S_B \times A^{A\setminus B}$ definita da $\psi(f) = (f|_B, f|_{A\setminus B})$ è una bigezione ($f|_B$ è bigettiva in quanto B è finito e una funzione surgettiva da un insieme finito in sé è anche iniettiva; l'inversa di ψ è data da $\varphi(f_1,f_2)=f_1\cup f_2$) e quindi $|\mathcal{X}_2| = \left|S_B \times A^{A\setminus B}\right| = 6!\cdot 14^8$.

(3). Dare $f \in \mathcal{X}_2$ equivale a dare due funzioni bigettive $f_1 : B \to B$ e $f_2 : A\setminus B \to A\setminus B$. Formalmente l'applicazione $\psi : \mathcal{X}_3 \to S_B \times S_{A\setminus B}$ definita da $\psi(f)=(f|_B, f|_{A\setminus B})$ è una bigezione ($f|_{A\setminus B}$ è bigettiva in quanto f è iniettiva e poichè $f(B)=B$ allora $f(A\setminus B)\subseteq A\setminus B$, inoltre $A\setminus B$ è finito e una funzione iniettiva da un insieme finito in sé è anche surgettiva; l'inversa di ψ è data da $\varphi(f_1,f_2)=f_1\cup f_2$) e quindi $|\mathcal{X}_3| = \left|S_B\times S_{A\setminus B}\right| = 6!\cdot 8!$. ❑

Soluzione dell'esercizio 3 In d_2 ci sono un numero dispari di numeri dispari, quindi non può essere lo score di un grafo.

Per d_1 usiamo il teorema dello score:

$$\begin{aligned} d_2 &= (1,1,2,2,2,2,3,3,4) \\ d_2' &= (1,1,2,2,1,1,2,2) \\ d_2' &= (1,1,1,1,2,2,2,2) \\ d_2'' &= (1,1,1,1,2,1,1) \\ d_2'' &= (1,1,1,1,1,1,2) \\ d_2''' &= (1,1,1,1,0,0) \end{aligned}$$

Dato che d_2''' è realizzabile come score di un grafo, anche d_2 lo è. La costruzione standard produce il grafo in figura 1 che è connesso.

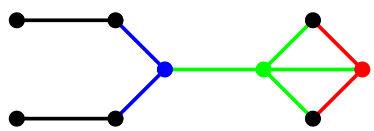

Figura 1: Il grafo costruito per la soluzione dell'esercizio 3. La configurazione di partenza è data dai vertici e lati neri a cui si aggiungono nell'ordine quelli rossi, blu e verdi.

(1). La risposta è no. La somma dei gradi dei vertici è 20, quindi un grafo che realizza d_1 ha 10 lati e 9 vertici. Dato che $9 \neq 10+1$ non può essere un albero.

(2). La risposta è sì. Quello di figura 1.

(3). Anche in questo caso la risposta è sì. Ad esempio quello in figura 2. ❑

Soluzione dell'esercizio 4 Sia $T=(V,E)$ un tale albero e sia $V=\{v_1,v_2,\ldots,v_{10}\}$ con $\deg(v_i)=1$ per $i=1,2.\ldots,7$. Allora dato che T è un albero $|E|=|V|-1=9$ e quindi

$$18 = 2\,|E| = \sum_{i=1}^{10}\deg(v_i) = 7+\deg(v_8)+\deg(v_9)+\deg(v_{10}).$$

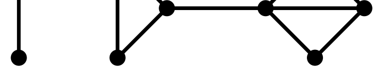

Figura 2: Un grafo sconnesso che realizza lo score d_1 dell'esercizio 3.

Se non ci fossero vertici di grado 4 allora si avrebbe che $\deg(v_j) \leq 3$ per ogni j e dalla relazione precedente si otterrebbe:

$$18 \leq 7 + 3 + 3 + 3 = 16$$

che è un assurdo. ❏