Matematica Discreta (II modulo)

Secondo appello, a.a. 2004/2005 — compito 2

21 luglio 2005

Da svolgersi in tre ore. Al candidato si richiede di svolgere almeno un esercizio di ciascuno dei due gruppi e di rispondere ad almeno una delle domande teoriche. **Tutte le risposte devono essere motivate**.

Non è ammessa la consultazione di libri e/o appunti.

Esercizio 1 Dire se la congruenza $x^{17} \equiv 3 \mod 29$ ammette soluzioni ed in tal caso determinarle tutte.

Esercizio 2 Sia A un insieme finito con n elementi.

1. Determinare n in modo tale che A abbia 10 sottinsiemi di cardinalità 3.
2. Mostrare che se n è pari, il numero dei sottinsiemi di A con 3 elementi è pari.
3. Dire se esistono numeri n dispari per cui A abbia un numero pari di sottinsiemi di cardinalità 3.
4. Determinare tutti i numeri n che verificano le condizioni del punto precedente.

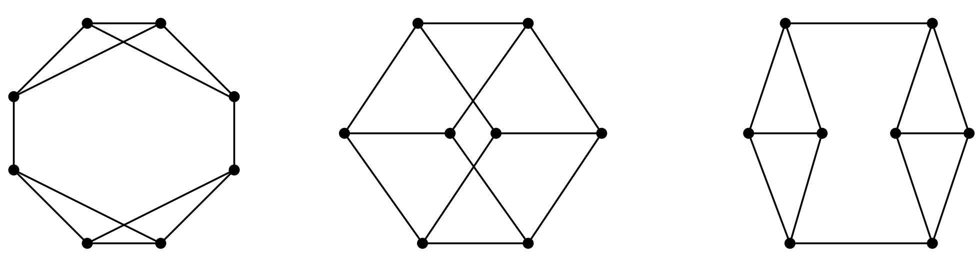
Esercizio 3 Dire, motivando la risposta, quale dei vettori

$$d_1 = (2, 2, 3, 3, 4, 4, 7, 7) \qquad d_2 = (1, 1, 1, 1, 3, 3, 6, 7, 7)$$

è lo score di un grafo e quando ciò è possibile costruire un tale grafo. Si dica inoltre se

1. è possibile trovare un tale grafo che sia anche un albero
2. è possibile trovare un tale grafo che sia sconnesso
3. è possibile trovare un tale grafo che sia 2-connesso

Esercizio 4 Dire, motivando la risposta, quali tra i grafi rappresentati in figura sono tra loro isomorfi e quali no.



Domanda di teoria 1. Si diano le definizioni di relazione d'equivalenza e di congruenza $\mod n$. Si provi che la congruenza $\mod n$ è una relazione d'equivalenza.

Domanda di teoria 2. Si dia la definizione di grafo, di grafo finito e di grado di un vertice. Si provi quindi che in ogni grafo finito la somma dei gradi dei vertici è uguale al doppio del numero dei lati.

Soluzione dell'esercizio 1 29 è primo, quindi 3 è invertibile $\mod 29$. Inoltre $\Phi(29) = 28$ e $(17, 28) = 1$, quindi la congruenza è risolubile. Un inverso di $17 \mod 28$ è dato da 5 e quindi le soluzioni della congruenza sono date da $\left[3^5\right]_{29} = [11]_{29}$. ❏

Soluzione dell'esercizio 2 (1). $10 = \left|\binom{A}{3}\right| = \binom{|A|}{3} = \binom{n}{3} = n(n-1)(n-2)/6$ se e solo se $n(n-1)(n-2) = 60$. Dato che gli unici tre numeri consecutivi il cui prodotto fa 60 sno 3, 4 e 5, si ha che $n = 5$.

Per le altre risposte si veda la soluzione dell'altro compito di questo appello. ❏

Soluzione dell'esercizio 3 Se $G = (V, E)$ è un grafo tale che score$(G) = d_2$ allora $|V| = 9$ e ci sono due vertci di grado 7, chiamiamoli u e v. Ma allora i vertci che sono adiacenti sia a u che a v devono essere almeno 5 (in un insieme con 9 elementi due sottinsiemi dicardinalità 7 hanno intersezione di cardinalità almeno $7 + 7 - 9 = 5$) e quindi ci dovrebbero essere almeno 5 vertici diversi da u e v con grado almeno 2. Ciò è in contraddizione con il fatto che di vertici di grado ≥ 2 e diversi da u e v ce ne dovrebbero essere soltanto 3.

Per d_1 usiamo il teorema dello score:

$$\begin{aligned} d_1 &= (2, 2, 3, 3, 4, 4, 7, 7) \\ d_1' &= (1, 1, 2, 2, 3, 3, 6) \\ d_1'' &= (0, 0, 1, 1, 2, 2) \end{aligned}$$

Dato che d_1'' è realizzabile come score di un grafo, anche d_1 lo è. La costruzione standard produce il grafo in figura 1 che è 2-connesso.

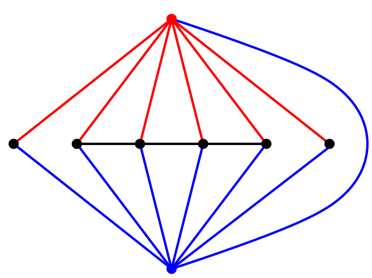


Figura 1: Il grafo costruito per la soluzione dell'esercizio 3. La configurazione di partenza è data dai vertici e lati neri a cui si aggiungono prima quelli rossi e quindi quelli blu.

(1). La risposta è no. Ogni albero finito havertici di grado 1, mentre in un tale grafo ogni vertice ha grado ≥ 2.

(2). La risposta è no. Se $G = (V, E)$ è un grafo tale che score$(G) = d_1$ allora esiste $v \in V$ tale che $\deg(V) = 7$, ossia ogni altro vertice gli è adiacente. Quindi G è connesso.

(3). Che il grafo di figura 1 sia 2-connesso lo si può vedere ad esempio mostrando che è ottenuto da un ciclo con successive aggiunzioni e suddivisioni di lati. ❏

Soluzione dell'esercizio 4 Il primo ed il terzo grafo sono tra loro isomorfi e contengono evidentemente dei 3-cicli. Il secondo non contiene 3-cicli (per una motivazione si veda la soluzione dell'altro compito di questo appello) e quindi non è isomorfo agli altri due. ❏