Matematica Discreta (II modulo)

Primo appello, a.a. 2001/2002
compito 2

24 giugno 2002

Da svolgersi in tre ore. Al candidato si richiede di svolgere almeno un esercizio di ciascuno dei due gruppi e di rispondere ad almeno una delle domande teoriche.

Non è ammessa la consultazione di libri e/o appunti.

Esercizio 1 Dire, motivando la risposta, se il sistema di congruenze

$$\begin{cases} x \equiv 28 \mod 45 \\ x \equiv 46 \mod 18 \end{cases}$$

ammette soluzioni ed in tal caso determinarle tutte.

Esercizio 2 Sia $X = \{1, 2, 3, 4\}$ e $Y = X \cup \{0, 5, 6\}$. Si calcolino:

1. $\left|\{f \in Y^X \mid f \text{ è iniettiva}\}\right|$
2. $\left|\{f \in Y^X \mid f \text{ è iniettiva e } f(1) = 4\}\right|$
3. Data $f \in Y^X$ iniettiva, dire, motivando la risposta, quali valori può assumere $\left|f^{-1}(\{0, 1, 6\})\right|$.

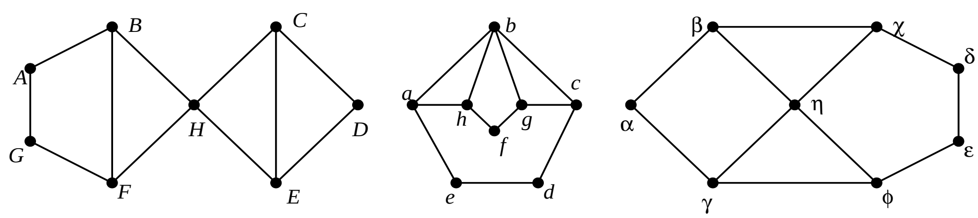
Esercizio 3 Dire, motivando la risposta, quale dei vettori

$$d_1 = (1, 1, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 10, 10) \qquad d_2 = (0, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 6, 8)$$

è lo score di un grafo e quando ciò è possibile costruire un tale grafo. Si dica inoltre se

1. è possibile trovare un tale grafo che sia anche un albero
2. è possibile trovare un tale grafo che sia sconnesso
3. è possibile trovare un tale grafo che sia 2-connesso

Esercizio 4 Dire, motivando la risposta, quali tra i grafi rappresentati in figura sono tra loro isomorfi e quali no.



Domanda di teoria 1. Si dia la definizione di elemento invertibile in $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$, quindi si enunci e si provi il piccolo teorema di Fermat.

Domanda di teoria 2. Si dia la definizione di albero di copertura di un grafo, quindi si enunci e si provi il teorema di esistenza dell'albero di copertura per i grafi finiti

Soluzione dell'esercizio 1 $(45,18) = 9 \mid 18 = 46 - 28$ quindi il sistema è risolubile. Inoltre, usando l'algoritmo di Euclide, si ottiene $9 = (1) \cdot 45 + (-2) \cdot 18$ quindi

$$46 - 28 = 18 = 2 \cdot 9 = 2((1) \cdot 45 + (-2) \cdot 18) = 2 \cdot 45 - 4 \cdot 18$$

pertanto $x_0 = 28 + 2 \cdot 45 = 46 + 4 \cdot 18 = 118$ è una soluzione del sistema. L'insieme delle soluzioni è allora dato da $\{118 + k[18,45] \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{118 + k90 \mid k \in \mathbb{Z}\}$. ❑

Soluzione dell'esercizio 2 (1). Se $|X| = k$ e $|Y| = n$ allora l'insieme delle funzioni iniettive da X in Y ha cardinalità $\binom{n}{k}k! = \frac{n!}{(n-k)!}$. Nel nostro caso $n = 7$, $k = 4$, quindi

$$\left|\{f \in Y^X \mid f \text{ è iniettiva}\}\right| = \frac{7!}{(7-4)!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840.$$

(2). Se consideriamo $X' = X \setminus \{1\}$ e $Y' = Y \setminus \{4\}$ allora l'insieme $\{f \in Y^X \mid f \text{ è iniettiva e } f(1) = 4\}$ può essere messo in bigezione con l'insieme $\{f \in Y'^{X'} \mid f \text{ è iniettiva}\}$ mediante la restrizione. Ma allora, applicando la stessaa formula del punto precedente, si ottiene che la cardinalità cercate è pari a

$$\left|\{f \in Y^X \mid f \text{ è iniettiva e } f(1) = 4\}\right| = \left|\{f \in Y'^{X'} \mid f \text{ è iniettiva}\}\right| = \frac{6!}{(6-3)!} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120.$$

(3). Dato che f è iniettiva, $\left|f^{-1}(\{0,1,6\})\right| \leq |\{0,1,6\}| = 3$. D'altra parte, dato che $|Y \setminus \{0,1,6\}| = 4 \geq |X| \geq 3 = |\{0,1,6\}|$, possono essere assunti tutti i quattro valori $0,1,2,3$. Costruiamo degli esempi:

$$\begin{array}{lcll}
f_i & : & X \longrightarrow Y & \qquad i = 0,1,2,3 \\
f_0 & : & x \longrightarrow x+1 & \\
f_1 & : & x \longrightarrow x & \\
f_2 & : & x \longrightarrow x-1 & \\
f_3 & : & x \longrightarrow \begin{cases} x-2 & \text{se } x \geq 1 \\ 6 & \text{se } x = 0 \end{cases} &
\end{array}$$

Si verifica immediatamente che per ogni $i = 0,1,2,3$ si ha che $\left|f_i^{-1}(\{0,1,6\})\right| = i$. ❑

Soluzione dell'esercizio 3 Un grafo G tale che $\text{score}(G) = d_2$ dovrebbe avere 9 vertici, un vertice di grado 8, ossia adiacente a tutti gli altri ed un vertce di grado 0 ossia adiacente a nessun vertce. Chiaramente ciò è contradditorio., quindi un tale G non può esistere.

Per d_1 usiamo il teorema dello score:

$$\begin{array}{rcl}
d_1 & = & (1,1,2,3,3,3,3,4,4,4,10,10) \\
d_1' & = & (1,0,1,2,2,2,2,3,3,3,9) \\
d_1' & = & (0,1,1,2,2,2,2,3,3,3,9) \\
d_1'' & = & (0,0,0,1,1,1,1,2,2,2)
\end{array}$$

Dato che d_1'' è realizzabile come score di un grafo, anche d_1 lo è. La costruzione standard produce il grafo in figura 1.

(1). La risposta è no. Se $G = (V,E)$ è un grafo tale che $\text{score}(G) = d_1$ allora $|V| = 12$ e $|E| = \frac{1}{2}\sum_{v \in V} \deg v = \frac{1}{2}(1+1+2+3+3+3+3+4+4+4+10+10) = 24$. Ma allora $|E| = 24 \neq 11 = |V| - 1$, quindi G non può essere un albero.

(2). La risposta è no. Se $G = (V,E)$ è un grafo tale che $\text{score}(G) = d_1$ allora esiste $v \in V$ con $\deg(v) = 10$. Sia $u \in V$ l'unico vertce tale che $\{u,v\} \notin E$ (l'unico vertice non collegato a V), dato che in d_1 non ci sono elementi nulli, $\deg(u) \geq 1$, ossia esiste $w \in V$ tale che $\{u,w\} \in E$. Ma allora ogni vertice diverso da u è congiungibile con v (c'è un lato tra i due), u è congiungibile con v ($P = (u,w,v)$ è un cammino da u a v) quindi tutti i vertici sono congiungibili a v e pertanto G è connesso.

(3). La risposta è no. Se $G = (V,E)$ è un grafo tale che $\text{score}(G) = d_1$ allora esiste $v \in V$ tale che $\deg(v) = 1$. Ma in ogni grafo 2-connesso si ha che $\deg(w) \geq 2$ per ogni vertice w. ❑

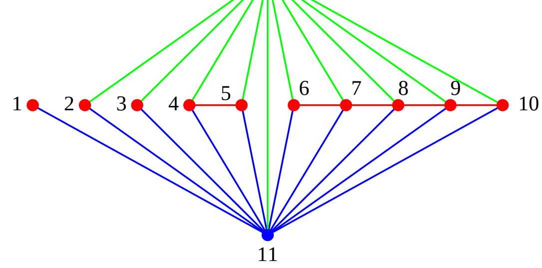


Figura 1: Il grafo costruito per la soluzione dell'esercizio 3. La configurazione di partenza è data dai vertici $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$, e dai lati $\{4, 5\}, \{6, 7\}, \{7, 8\}, \{8, 9\}, \{9, 10\}$ che realizzano lo score d_1'' a cui sono successivamente aggiunti i vertici 11 e 12 ottenendo dei grafi, che realizzano, nell'ordine, gli score d_1' e d_1.

Soluzione dell'esercizio 4 Il primo grafo non è 2-connesso, infatti se a questo grafo si toglie il vertice H si ottengono i due cicli disgiunti (A, B, F, G, A) e (C, D, E, C), mentre il secondo grafo è hamiltoniano (e quindi quindi è 2-connesso) in quanto c'è il ciclo $(a, b, h, f, g, c, d, e, a)$.

Di conseguenza il primo ed il secondo grafo non sono isomorfi.

Il secondo e il terzo grafo sono isomorfi (conseguentemente il primo e il terzo non lo sono). Un isomorfismo è dato ad esempio dalla funzione f definita da:

$$\begin{array}{ccccccc} a & \mapsto & \chi & \qquad & e & \mapsto & \delta \\ b & \mapsto & \eta & & f & \mapsto & \alpha \\ c & \mapsto & \varphi & & g & \mapsto & \gamma \\ d & \mapsto & \epsilon & & h & \mapsto & \beta \end{array}$$

Che tale funzione sia un isomorfismo segue da una semplice verifica. L'insieme dei lati del secondo grafo è dato da

$$\big\{\{b, a\}, \{a, e\}, \{e, d\}, \{d, c\}, \{c, b\}, \{g, c\}, \{a, h\}, \{b, g\}, \{g, f\}, \{f, h\}, \{b, h\}\big\}$$

i cui trasformati tramite f sono

$$\big\{\{\eta, \chi\}, \{\chi, \delta\}, \{\delta, \epsilon\}, \{\epsilon, \varphi\}, \{\varphi, \eta\}, \{\gamma, \varphi\}, \{\chi, \beta\}, \{\eta, \gamma\}, \{\gamma, \alpha\}, \{\alpha, \beta\}, \{\eta, \beta\}\big\}$$

che sono proprio tutti e soli i lati del terzo grafo. ❏