Matematica Discreta (II modulo)

Primo appello, a.a. 2001/2002
compito 1

24 giugno 2002

Da svolgersi in tre ore. Al candidato si richiede di svolgere almeno un esercizio di ciascuno dei due gruppi e di rispondere ad almeno una delle domande teoriche.

Non è ammessa la consultazione di libri e/o appunti.

Esercizio 1 Dire, motivando la risposta, se il sistema di congruenze

$$\begin{cases} x \equiv 20 \mod 156 \\ x \equiv 8 \mod 108 \end{cases}$$

ammette soluzioni ed in tal caso determinarle tutte.

Esercizio 2 Sia $X = \{1,2,3,4,5,6\}$ e $Y = X \cup \{0,7\}$. Si calcolino:

1. $\left|\{f \in Y^X \mid f \text{ è iniettiva}\}\right|$
2. $\left|\{f \in Y^X \mid f \text{ è iniettiva e } f(1) = 4\}\right|$
3. Data $f \in Y^X$ iniettiva, dire, motivando la risposta, quali valori può assumere $\left|f^{-1}(\{0,1\})\right|$.

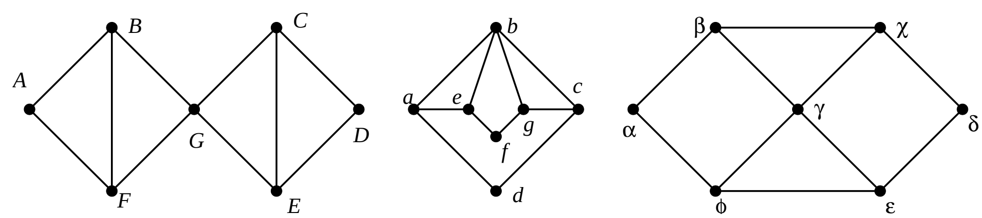
Esercizio 3 Dire, motivando la risposta, quale dei vettori

$$d_1 = (2,2,2,2,2,2,2,3,4,4,10,11) \qquad d_2 = (1,1,1,1,1,1,2,8,8)$$

è lo score di un grafo e quando ciò è possibile costruire un tale grafo. Si dica inoltre se

1. è possibile trovare un tale grafo che sia anche un albero
2. è possibile trovare un tale grafo che sia sconnesso
3. è possibile trovare un tale grafo che sia 2-connesso

Esercizio 4 Dire, motivando la risposta, quali tra i grafi rappresentati in figura sono tra loro isomorfi e quali no.



Domanda di teoria 1. Si dia la definizione di elemento invertibile in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, quindi si enunci e si provi il piccolo teorema di Fermat.

Domanda di teoria 2. Si dia la definizione di albero di copertura di un grafo, quindi si enunci e si provi il teorema di esistenza dell'albero di copertura per i grafi finiti

Soluzione dell'esercizio 1 $(156, 108) = 12 \mid -12 = 8-20$ quindi il sistema è risolubile. Inoltre, usando l'algoritmo di Euclide, si ottiene $12 = (-2) \cdot 156 + (3) \cdot 108$ quindi

$$8 - 20 = -12 = -((-2) \cdot 156 + (3) \cdot 108) = 2 \cdot 156 - 3 \cdot 108$$

e pertanto $x_0 = 332 = 8 + 3 \cdot 108 = 20 + 2 \cdot 156$ è una soluzione del sistema.

L'insieme delle soluzioni è allora dato da $\{332 + k[156, 108] \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{332 + k1404 \mid k \in \mathbb{Z}\}$ ❑

Soluzione dell'esercizio 2 (1). Se $|X| = k$ e $|Y| = n$ allora l'insieme delle funzioni iniettive da X in Y ha cardinalità $\binom{n}{k}k! = \frac{n!}{(n-k)!}$. Nel nostro caso $n = 8$, $k = 6$, quindi

$$\left|\{f \in Y^X \mid f \text{ è iniettiva}\}\right| = \frac{8!}{(8-6)!} = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 20160.$$

(2). Se consideriamo $X' = X \setminus \{1\}$ e $Y' = Y \setminus \{4\}$ alora l'insieme $\{f \in Y^X \mid f \text{ è iniettiva e } f(1) = 4\}$ può essere messo in bigezione con l'insieme $\{f \in Y'^{X'} \mid f \text{ è iniettiva}\}$ mediante la restrizione. Ma allora, applicando la stessaa formula del punto precedente, si ottiene che la cardinalità cercate è pari a

$$\left|\{f \in Y^X \mid f \text{ è iniettiva e } f(1) = 4\}\right| = \left|\{f \in Y'^{X'} \mid f \text{ è iniettiva}\}\right| = \frac{7!}{(7-5)!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 2520.$$

(3). Dato che f è iniettiva, $\left|f^{-1}(\{0,1\})\right| \leq |\{0,1\}| = 2$. D'altra parte, dato che $|Y \setminus \{0,1\}| = 6 \geq |X| \geq 2 = |\{0,1\}|$, possono essere assunti tutti i tre valori $0, 1, 2, 3$. Costruiamo degli esempi:

$$\begin{array}{lcll} f_i & : & X \longrightarrow Y & \qquad i = 0,1,2 \\ f_0 & : & x \longrightarrow x+1 & \\ f_1 & : & x \longrightarrow x & \\ f_2 & : & x \longrightarrow x-1 & \end{array}$$

Si verifica immediatamente che per ogni $i = 0, 1, 2$ si ha che $\left|f_i^{-1}(\{0,1\})\right| = i$. ❑

Soluzione dell'esercizio 3 Un grafo G tale che score$(G) = d_2$ dovrebbe avere 9 vertici, due vertici, chiamiamoli u e v, di grado 8, ossia adiacenti a tutti gli altri. Ma allora ogni vertice diverso da u e v questi due deve essere adiacente almeno ad uno di loro e quindi avere grado almeno 2. Ma se score$(G) = d_2$ esiste almeno un vertce di grado 1, che è in contraddizione con quanto appena provato. Quindi un tale G non può esistere.

Per d_1 usiamo il teorema dello score:

$$\begin{array}{lcl} d_1 & = & (2,2,2,2,2,2,2,3,4,4,10,11) \\ d_1' & = & (1,1,1,1,1,1,1,2,3,3,9) \\ d_1'' & = & (1,0,0,0,0,0,0,1,2,2) \end{array}$$

Dato che d_1'' è realizzabile come score di un grafo, anche d_1 lo è. La costruzione standard produce il grafo in figura 1 che è 2-connesso.

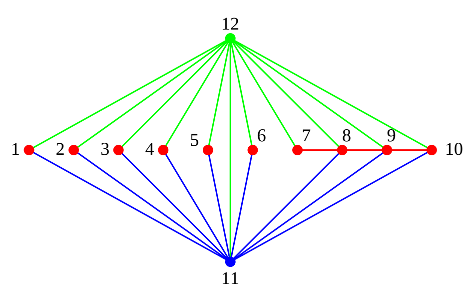


Figura 1: Il grafo costruito per la soluzione dell'esercizio 3. La configurazione di partenza è data dai vertici $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$, e dai lati $\{7, 8\}, \{8, 9\}, \{9, 10\}$ che realizzano lo score d_1'' a cui sono successivamente aggiunti i vertici $11, 12$ ottenendo dei grafi, che realizzano, nell'ordine, gli score d_1' e d_1.

$\frac{1}{2}\sum_{v\in V}\deg v = \frac{1}{2}(2+2+2+2+2+2+2+3+4+4+10+11) = 23$. Ma allora $|E| = 23 \neq 11 = |V|-1$, quindi G non può essere un albero.

(2). La risposta è no. Se $G = (V, E)$ è un grafo tale che $\text{score}(G) = d_1$ allora esiste $v \in V$ tale che $\deg(V) = 11$, ossia ogni altro vertice è adiacente e quindi congiungibile con v. Ne consegue che G è connesso.

(3). Che il grafo di figura 1 sia 2-connesso lo si può vedere mostrando che è ottenuto da un ciclo con successive aggiunzioni e suddivisioni di lati (cfr. figura 2).

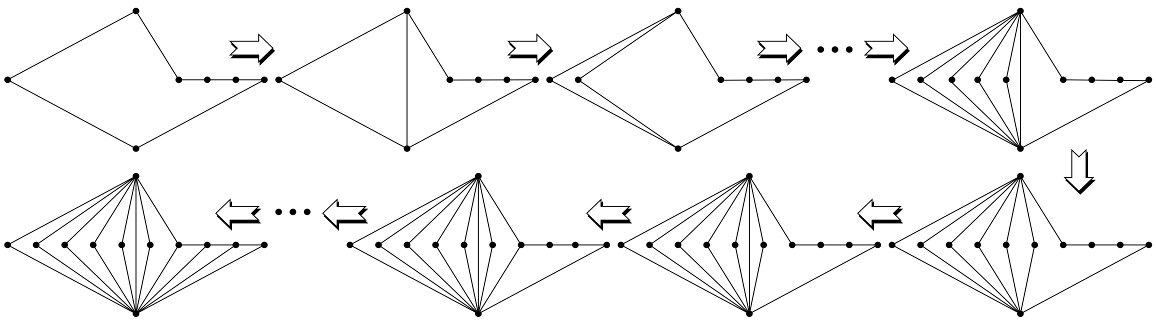


Figura 2: Il grafo di figura 1 è ottenuto da un ciclo mediante aggiunzione e suddivisione di lati, quindi è 2-connesso

Un altro modo di provare la 2-connessione di questo grafo è il seguente. Sia G il grafo e sia$w$ il vertice di grado 11. Chiaramente, per ogni $v \neq w$ si ha che $G - v$ ha un vertice di grado 10 (e 11 vertici) e quindi è connesso. D'altra parte G ha anche un vertice u di grado 10 e quindi u ha grado 9 in $G - w$ (è adiacente a tutti i suoi vertici tranne uno) e dato che ogni vertice di G ha grado almeno 2, ogni vertice di $G - w$ ha grado almeno 1. Ma allora l'unico vertice v di $G - w$ non adiacente a u sarà adiacente almeno ad un altro vertice t e quindi $P = (u, t, v)$ è un cammino tra u e v in $G - w$. Ne consegue che tutti i vertici di $g - w$ sono congiungibili a u e quindi anche $G - w$ è connesso. Questo ragionamento prova in realtà che ogni grafo tale che $\text{score}(G) = d_1$ è 2-connesso. ❑

Soluzione dell'esercizio 4 Il primo grafo non è 2-connesso, infatti se a questo grafo si toglie il vertice G si ottengono i due cicli disgiunti (A, B, F, A) e (C, D, E, C), mentre il secondo grafo è hamiltoniano (e quindi quindi è 2-connesso) in quanto c'è il ciclo (a, b, e, f, g, c, d, a).

Di conseguenza il primo ed il secondo grafo non sono isomorfi.

Il secondo e il terzo grafo sono isomorfi (conseguentemente il primo e il terzo non lo sono). Un isomorfismo è dato ad esempio dalla funzione f definita da:

$$
\begin{array}{lcl@{\qquad\qquad}lcl}
a & \mapsto & \chi & e & \mapsto & \beta \\
b & \mapsto & \gamma & f & \mapsto & \alpha \\
c & \mapsto & \epsilon & g & \mapsto & \varphi \\
d & \mapsto & \delta & & &
\end{array}
$$

Che tale funzione sia un isomorfismo segue da una semplice verifica. L'insieme dei lati del secondo grafo è dato da

$$\big\{\{b,a\},\{a,d\},\{d,c\},\{c,b\},\{g,c\},\{a,e\},\{b,g\},\{g,f\},\{f,e\},\{e,b\}\big\}$$

i cui trasformati tramite f sono

$$\big\{\{\gamma,\chi\},\{\chi,\delta\},\{\delta,\epsilon\},\{\epsilon,\gamma\},\{\varphi,\epsilon\},\{\chi,\beta\},\{\gamma,\varphi\},\{\varphi,\alpha\},\{\alpha,\beta\},\{\beta,\gamma\}\big\}$$

che sono proprio tutti e soli i lati del terzo grafo. ❑