Matematica Discreta, II modulo

Seconda prova in itinere, a.a. 2000/2001

4 giugno 2001

Da svolgersi in tre ore. Si richiede che vengano svolti a scelta quattro (e non più di qyuattro) dei cinque esercizi e che si risponda alla domanda di teoria.

Esercizio 1 Sia $G = (V, E)$ un grafo finito. Si provi che se $|E| > |V|$ allora esiste un vertice $v \in V$ tale che $\deg(v) \geq 3$.

Esercizio 2 Sia $G = (V, E)$ un grafo finito e sia $v \in V$ tale che $\deg(v) = d$. Si supponga che $G - v$ abbia k componenti connesse. Si provi che allora

$$|E| + k \geq |V| + d - 1$$

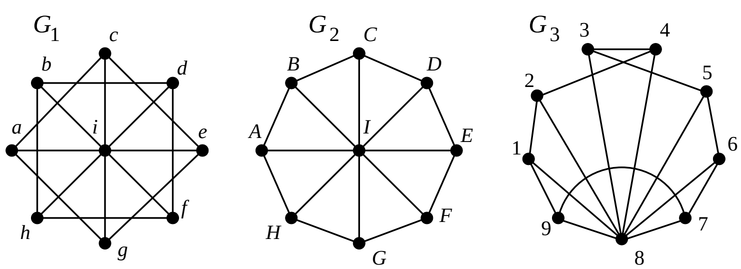
Esercizio 3 Dire, motivando la risposta, quale dei vettori

$$\begin{aligned} d_1 &= (1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 5, 6, 8, 11) \\ d_2 &= (1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4) \end{aligned}$$

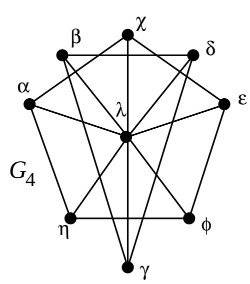
è lo score di un grafo e quando ciò è possibile costruire un tale grafo.

Si dica inoltre se è possibile trovare un tale grafo che sia anche aciclico.

Esercizio 4 Dire quali tra i seguenti tre grafi sono tra loro isomorfi e quali no.



Esercizio 5 Provare che il grafo G_4 rappresentato qui sotto, non è isomorfo al grafo G_1 dell'esercizio precedente.



Domanda di teoria. Si dia la definizione di albero e si provi che un grafo finito è un albero se e solo se è connesso e i vertici sono uno più dei lati.

Soluzioni proposte

Soluzione dell'esercizio 1 Se per assurdo $\deg v \leq 2$ per ogni $v \in V$ allora

$$2\,|E| = \sum_{v \in V} \deg(v) \leq \sum_{v \in V} 2 = 2\,|V|$$

e quindi si avrebbe $|E| \leq |V|$ contrariamente all'ipotesi che $|E| > |V|$. ❑

Soluzione dell'esercizio 2 Siano $G_1 = (V_1, E_1), \ldots, G_k = (V_k, E_k)$ le componentio connesse di $G - v$. Dato che ogni G_i è connesso,

$$|E_i| \geq |V_i| - 1 \quad \forall i = 1, \ldots, k.$$

Inoltre

$$|E(G-v)| = \sum_{i=1}^{k} |E_i| \qquad |V(G-v)| = \sum_{i=1}^{k} |V_i|$$

Infine, per definizione di $G - v$, si ha che

$$|V(G-v)| = |V| - 1$$

e, dato che $\deg(v) = d$, quando si cancella il vertice v si cancellano esattamente d lati, ovvero

$$|E(G-v)| = |E| - d.$$

Unendo tutte le informazioni sin qui raccolte si ottiene allora:

$$\begin{aligned}
|E| - d &= |E(G-v)| = \sum_{i=1}^{k} |E_i| \\
&\geq \sum_{i=1}^{k} (|V_i| - 1) = \sum_{i=1}^{k} |V_i| - k = |V(G-v)| - k = |V| - 1 - k
\end{aligned}$$

da cui segue immediatamente la tesi. ❑

Soluzione dell'esercizio 3 d_1 non è lo score di alcun grafo, un grafo con d_1 come score dovrebbe avere un numero dispari di vertici di grado dispari.

Usiamo il teorema dello score, per determinare se d_2 è realizzabile oppure no.

$$\begin{aligned}
d_2 &= (1,1,2,2,2,2,3,3,3,3,4) \\
d_2^{(1)} &= (1,1,2,2,2,2,2,2,2,2) \\
d_2^{(2)} &= (1,1,2,2,2,2,2,1,1) \\
d_2^{(2)} &= (1,1,1,1,2,2,2,2,2) \\
d_2^{(3)} &= (1,1,1,1,2,2,1,1) \\
d_2^{(3)} &= (1,1,1,1,1,1,2,2) \\
d_2^{(4)} &= (1,1,1,1,1,0,1)
\end{aligned}$$

$d_2^{(4)}$ è realizzabile, dato che è costituito da un numero pari di 1 e da 0 quindi anche d_2 è realizzabile. Si veda la figure 1 per una realizzazione.

Un grafo che realizzi lo score d_2 ha 11 vertici e 13 lati (somma dei gradi diviso 2). Un tale grafo non può essere aciclico, in quanto se un grafo (G, E) non contiene cicli, necessariamente $|E| \leq |(|\,V) + 1$. ❑

Soluzione dell'esercizio 4 $G_2 \cong G_3$ un isomorfismo è ad esempio la funzione definita da:

$$\begin{array}{ccc@{\qquad}ccc}
A & \to & 1 & F & \to & 6 \\
B & \to & 2 & G & \to & 7 \\
C & \to & 4 & H & \to & 9 \\
D & \to & 3 & I & \to & 8 \\
E & \to & 5 & & &
\end{array}$$

$G_1 \not\cong G_2$ Infatti $G_1 - i$ è costituito dai due cicli disgiunti (a, c, e, g, a), (b, d, f, h, b) e quindi è sconnesso. Ovvero G_1 non è 2-connesso. Invece G_2 è 2-connesso essendo hamiltoniano. Un ciclo hamiltoniano di G_2 è dato ad esempio da: $(A, B, C, D, E, F, G, I, H, A)$.

Dal fatto che $G_1 \not\cong G_2$ e $G_2 \cong G_3$ ne segue allora che $G_1 \not\cong G_3$. ❑

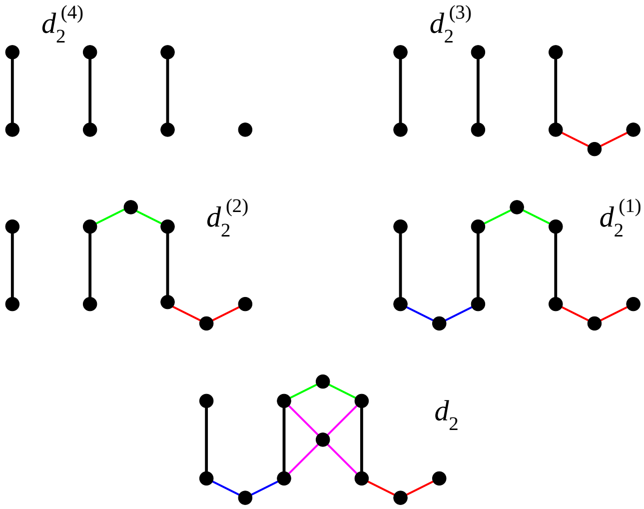


Figura 1: Realizzazione dello score d_2 dell'esercizio 3

Soluzione dell'esercizio 5 I due grafi hanno entrambi un unico vertice di grado 8 rispettivamente il vertice i ed il vertice λ, se esistesse un isomorfismo $f : G_1 \to G_4$ allora dovrebbe aversi $f(i) = \lambda$. Ma allora f definirebbe (per restrizione) un isomorfismo tra $G_1 - i$ e $G_4 - \lambda$. Ma questi due grafi non sono isomorfi, inquanto il primo è costituito da due cicli disgiunti di lunghezza 4 (vedi la soluzione dell'esercizio precedente) mentre $G_4 - \lambda$ è costituito dai due cicli disgiunti $(\beta, \delta, \gamma, \beta)$ e $(\alpha, \chi, \epsilon, \varphi, \eta, \alpha)$, che hanno lunghezza 3 e 5 rispettivamente (si veda la figura). ❏