Matematica Discreta (II modulo)

Terzo appello, a.a. 200/2001

17 settembre 2001

Esercizio 1 Si determinino le soluzioni della congruenza $x^7 \equiv 5 \mod 77$.

Esercizio 2 Dire, motivando la risposta, se il seguente sistema di congruenze ammette soluzione ed in tal caso determinarle:

$$\begin{cases} x \equiv 37 \mod 168 \\ x \equiv 51 \mod 770 \end{cases}$$

Esercizio 3 1. Siano $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, $n_1, n_2 \geq 0$. Si provi che

$$\binom{n_1}{2} + \binom{n_2}{2} \leq \binom{n_1 + n_2 - 1}{2}$$

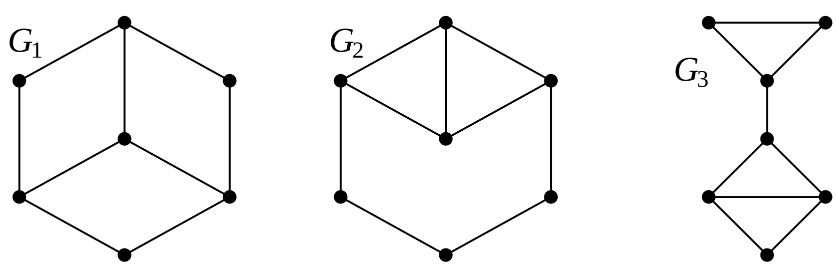
2. Si usi il punto precedente per provare che se $G = (V, E)$ è un grafo finito tale che
$$|E| > \binom{|V| - 1}{2}$$
allora G è connesso.

3. Trovare un esempio di un grafo sconnesso $G = (V, E)$ tale che
$$|E| = \binom{|V| - 1}{2}$$

Esercizio 4 Dire, motivando la risposta, se esistono grafi il cui score sia $d = (1, 1, 1, 1, 2, 3, 3, 3, 5)$.

In caso di risposta affermativa, se ne determinino, se possibile, uno connesso e uno sconnesso.

Esercizio 5 Provare che i tre grafi in figura non sono a due a due isomorfi:



Soluzioni proposte

Soluzione dell'esercizio 1 $(5, 7) = 1$, quindi 5 è invertibile in $\mathbb{Z}/_{77\mathbb{Z}}$. $77 = 7 \cdot 11$, quindi $\Phi(77) = 6 \cdot 10 = 60$. Dato che $(7, 60) = 1$, pertanto esiste un unico $d \pmod{60}$ tale che $7d \equiv 1 \mod 40$. Usando ad esempio l'algoritmo diEuclide, si trova che $d \cdot 43 = 1 \pmod{60}$.

Utilizzando il piccolo teorema di Fermat, si ottiene allora che $5^43 = 26 \mod 77$ è la soluzione della congruenza. ❑

Soluzione dell'esercizio 2
❑

Soluzione dell'esercizio 3
❑

Soluzione dell'esercizio 4
❑

Soluzione dell'esercizio 5
❑