Matematica Discreta (II modulo)

Secondo appello, a.a. 2000/2001

2 luglio 2001

Esercizio 1 Dire se il sistema di congruenze

$$\begin{cases} x \equiv 37 & \mod 280 \\ x \equiv 47 & \mod 165 \end{cases}$$

ammette soluzioni ed in tal caso determinarle.

Esercizio 2 Sia x_n la successione definita ricorsivamente da

$$\begin{cases} x_{n+2} = 2x_{n+1} + x_n \\ x_1 = 44 \\ x_0 = 43 \end{cases}$$

1. Si provi che x_n è dispari se n è pari ed è pari se n è dispari;
2. Si provi che $[x_{n+1}, x_n] = x_{n+1}x_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Esercizio 3 Si determini il numero di anagrammi della parola

PRECIPITEVOLISSIMEVOLMENTE.

Si determini inoltre il numero di tali anagrammi che scambiano le P con le O.

Esercizio 4 Dire, motivando la risposta, quale dei vettori

$$\begin{aligned} d_1 &= (0, 1, 2, 3, 3, 3, 5, 8, 8, 9) \\ d_2 &= (1, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5) \end{aligned}$$

è lo score di un grafo e quando ciò è possibile costruire un tale grafo. Si dica inoltre se

1. è possibile trovare un tale grafo che sia anche un albero
2. è possibile trovare un tale grafo che sia anche connesso

Esercizio 5 Sia $G = (V, E)$ un grafo e sia $n = |V| \geq 3$. Si provi che in G non possono esistere contemporaneamente due vertici di grado $n-1$ e un vertice di grado 1.

Esercizio 6 Dire quali tra i seguenti grafi sono tra loro isomorfi e quali no:

1. $G_1 = (\mathbb{Z}/_{16\mathbb{Z}}, E_1)$, essendo $E_1 = \left\{\{n, m\} \mid n = m + 2 \text{ in } \mathbb{Z}/_{16\mathbb{Z}}\right\}$
2. $G_2 = (\mathbb{Z}/_{16\mathbb{Z}}, E_2)$, essendo $E_2 = \left\{\{n, m\} \mid n = m + 3 \text{ in } \mathbb{Z}/_{16\mathbb{Z}}\right\}$
3. $G_3 = ((\mathbb{Z}/_{17\mathbb{Z}})^*, E_3)$, essendo $E_3 = \left\{\{n, m\} \mid n = 3m \text{ in } \mathbb{Z}/_{17\mathbb{Z}}\right\}$

Soluzioni proposte

Soluzione dell'esercizio 1

❏

Soluzione dell'esercizio 2 (1).
(2). Dato che $[x_n, x_{n+1}] = x_n x_{n+1}/(x_n, x_{n+1})$, provare la tesi equivale a provare che $(x_n, x_{n+1}) = 1$ per ogni n. Lo facciamo per induzione su n. Se $n = 0$, $(x_1, x_0) = (44, 43) = 1$, dato che sono numeri consecutivi. Supponiamo la tesi vera per n e proviamola per $n + 1$. Dalla relazione di ricorrenza si ha che $(x_{n+2}, x_{n+1}) = (x_{n+1}, x_n$ e per ipotesi di induzione, quest'ultimo è 1. ❏

Soluzione dell'esercizio 3

❏

Soluzione dell'esercizio 4

❏

Soluzione dell'esercizio 5

❏

Soluzione dell'esercizio 6 Scriviamo esplicitamente i lati dei tre grafi:

$$
\begin{aligned}
E_1 &= \{\{0,1\},\{1,2\},\{2,3\},\{3,4\},\{4,5\},\{5,0\}\} \\
E_2 &= \{\{0,2\},\{1,3\},\{2,4\},\{3,5\},\{4,0\},\{5,1\}\} \\
E_3 &= \{\{3,1\},\{6,2\},\{2,3\},\{5,4\},\{1,5\},\{4,6\}\}
\end{aligned}
$$

Osserviamo che $G_1 \cong G_3 \cong C_6$, dato che $(0,1,2,3,4,5,0)$ è un ciclo in G_1 che contiene tutti i vertici e

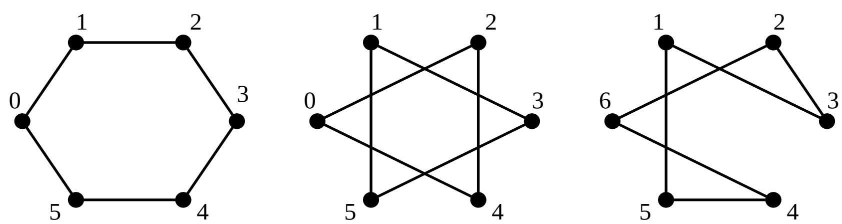

Figura 1: I gragfi G_1 e G_3 sono dei cicli, mente il grafo G_2 è costituito da due cicli disgiunti, in particolare non è connesso

tutti i lati e anche $(3,1,5,4,6,2,3)$ è un ciclo in G_3 che contiene tutti i vertici e tutti i lati. In particolare G_1 e G_3 sono connessi. Il grafo G_2 non è connesso, in quanto è costituito dai due cicli $(0,2,4,0)$ e $(1,3,5,1)$ che non hanno vertici in comune. Quindi G_2 non è isomorfo né a G_1 né a G_2. Si veda la figura1. ❏