Matematica Discreta, II modulo

Prima prova in itinere, a.a. 1999/2000

14 aprile 2000

Da svolgersi in due ore. Ai cinque esercizi è sono assegnati rispettivamente i seguenti punteggi:
Esercizio 1: 9/30, Esercizio 2: 9/30, Esercizio 3: 6/30, Esercizio 4: 7/30, Esercizio 5: 9/30.

Esercizio 1 Siano $n, m \in \mathbb{Z} - \{0\}$, tali che $n \mid m$. Si provi che

1. per ogni $a \in \mathbb{Z}$ si ha $(a, n) \mid (a, m)$
2. per ogni $a \in \mathbb{Z}$ si ha $(a, m)/(a, n) \mid m/n$ [Suggerimento: se $m = kn$, si usi il fatto che $(ka, m) = (ka, kn) = k(a, n)$.]

Esercizio 2 Sia x_n la successione definita ricorsivamente da:

$$\begin{cases} x_{n+2} &= 3x_{n+1} + 2x_n \\ x_0 &= 0 \\ x_1 &= 1 \end{cases}$$

1. Si provi che per ogni $n \geq 1$ il numero x_n è un intero dispari.
2. Si provi che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha che $(x_{n+1}, x_n) = 1$.
3. Si determini una forma esplicita di x_n.

Esercizio 3 Dire se il sistema di congruenze

$$\begin{cases} x \equiv 27 \mod 218 \\ x \equiv 31 \mod 102 \end{cases}$$

ammette soluzioni ed in tal caso determinarle.

Esercizio 4 Si determini il numero di anagrammi della parola

ABRACADABRA.

Si determini inoltre il numero di quelli che iniziano con la lettera A.

Esercizio 5 Si consideri l'applicazione $\sigma : \mathbb{Z}/_{14\mathbb{Z}} \to \mathbb{Z}/_{14\mathbb{Z}}$ definita da $\sigma(x) = 3x + 1$ (somma e prodotto sono intesi in $\mathbb{Z}/_{14\mathbb{Z}}$).

1. Si provi che σ è una permutazione.
2. Si determini la decomposizione in cicli disgiunti di σ
3. Si determini il minimo naturale n tale che $\sigma^n = \mathrm{id}$

Soluzioni proposte

Soluzione dell'esercizio 1 (1) Per definizione $(a,n) \mid a$ e $(a,n) \mid n$; dato che $n \mid m$, per la transitività della relazione $\mid$ si ha che $(a,n) \mid m$. Ma allora (a,n) è un divisore sia di a che di m, e quindi è un divisore di (a,m).
(2) Sia $m = kn$, dato che $a \mid ka$ e $m \mid m$ si ha che $(a,m) \mid (ka,m) = (ka,kn) = k(a,n)$. Ma allora esiste un h tale che $k(a,n) = h(a,m)$ da cui $m/n = k = h(a,m)/(a,n)$, che è la tesi. ❑

Soluzione dell'esercizio 2 (1) Per induzione su n. Se $n = 1$ allora $x_n = x_1 = 1$ è dispari. Supponiamo che la tesi sia vera per $n \geq 1$, allora, dalla definizione di x_n si ha che

$$x_{n+1} = 3x_n + 2x_{n-1}$$

per ipotesi di induzione x_n è dispari e quindi anche $3x_n$ è dispari, mentre $2x_{n-1}$ è pari. Essendo somma di un numero pari e di un numero dispari, anche x_{n+1} è dispari.
(2) Per induzione su n. Se $n = 0$ allora $(x_1, x_0) = (1,0) = 1$. Supponiamo la tesi vera per $n \geq 0$, ossia che $(x_{n+1}, x_n) = 1$. Dalla definizione di x_n si ha che $(x_{n+2}, x_{n+1}) = (x_{n+1}, 2x_n)$. Dato che per il punto (1), x_{n+1} è dispari, $(x_{n+1}, 2) = 1$ e quindi $(x_{n+1}, 2x_n) = (x_{n+1}, x_n) = 1$.
(3) Il polinomio caratteristico della relazione di ricorsione è dato da, $P(t) = t^2 - 3t - 2$ che ha le due radici $(3+\sqrt{17})/2$ e $(3-\sqrt{17})/2$, quindi una successione che verifica la relazione di ricorsione data è della forma

$$x_n = \alpha \left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)^n + \beta \left(\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)^n$$

Imponendo che siano verificate le condizioni iniziali si ottiene il sistema lineare:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha \frac{3+\sqrt{17}}{2} + \beta \frac{3-\sqrt{17}}{2} = 1 \end{cases}$$

che ha per soluzione $\alpha = -\beta = 1/\sqrt{17}$, quindi la successione x_n è data da:

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{17}} \left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{17}} \left(\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)^n.$$

❑

Soluzione dell'esercizio 3 Il sistema ha soluzione se e solo se $(218, 102) \mid (31 - 27) = 4$. Usiamo l'algoritmo di Euclide per il calcolo del M.C.D. tra 218 e 102.

$$\begin{array}{rcl} 218 & = & 102 \cdot 2 + 14 \\ 102 & = & 14 \cdot 7 + 4 \\ 14 & = & 4 \cdot 3 + 2 \\ 4 & = & 2 \cdot 2 \end{array}$$

quindi $(218, 102) = 2$ e pertanto il sistema è risolubile.

Esprimiamo 2 come combinazione intera di 218 e 102.

$$\begin{array}{rcllrcl} 2 & = & 14 + 4 \cdot (-3) & & & & \\ 4 & = & 102 + 14 \cdot (-7) & \Rightarrow & 2 & = & 14 + (102 + 14 \cdot (-7))(-3) \\ & & & & & = & 14 \cdot (22) + 102 \cdot (-3) \\ 14 & = & 218 + 102 \cdot (-2) & \Rightarrow & 2 & = & (218 + 102 \cdot (-2)) \cdot (22) + 102 \cdot (-3) \\ & & & & & = & 218 \cdot (22) + 102 \cdot (-47) \end{array}$$

Quindi, $31 - 27 = 218 \cdot (44) + 102 \cdot (-94)$ da cui

$$31 + 102 \cdot 94 = 27 + 218 \cdot 44 = 9619$$

è una soluzione del sistema di congruenze. L'insieme delle soluzioni è allora dato da

$$\begin{aligned} \{9619 + k[218, 102] \mid k \in \mathbb{Z}\} &= \{9619 + k218 \cdot 51 \mid k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{9619 + k11118 \mid k \in \mathbb{Z}\}. \end{aligned}$$

❏

Soluzione dell'esercizio 4 Il numero di anagrammi della parola ABRACADABRA è pari al fattoriale del numero delle lettere che la compongono (11) diviso il prodotto dei fattoriali del numero di volte che ciascuna lettera è ripetuta. Dato che la A è ripetuta 5 volte, la B e la R sono ripetute 2 volte e tutte le altre lettere sono ripetute una sola volta). I, il numero cercato è dato da:

$$\frac{11!}{5!2!2!} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{2 \cdot 2} = 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 3 = 83160$$

Dare un anagramma che inizia per A della parola ABRACADABRA, è equivalente a dare un qualsiasi anagramma della parola BRACADABRA, e questi, sono in numero di:

$$\frac{10!}{4!2!2!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{2 \cdot 2} = 10 \cdot 9 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 5 = 37800.$$

❏

Soluzione dell'esercizio 5 (1) Proviamo che σ è iniettiva. Dato che $\mathbb{Z}/_{14\mathbb{Z}}$ è finito, allora σ risulterà essere anche surgettiva. Suponiamo che $\sigma(x) = \sigma(y)$, allora

$$3x + 1 = 3y + 1 \text{ in } \mathbb{Z}/_{14\mathbb{Z}} \Rightarrow 3x = 3y \text{ in } \mathbb{Z}/_{14\mathbb{Z}}$$

ma ora, dato che $(3, 14) = 1$, 3 è invertibile in $\mathbb{Z}/_{14\mathbb{Z}}$ e quindi dall'uguaglianza precedente, moltiplicando entrambi i membri per l'inverso di 3, segue allora che $x = y$.

(2) Semplici calcoli mostrano che:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 4 & 7 & 10 & 13 & 2 & 5 & 8 & 11 & 0 & 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$$

e quindi la decomposizione in cicli disgiunti della permutazione σ è data da:

$$\sigma = (0\ 1\ 4\ 13\ 12\ 9)(2\ 7\ 8\ 11\ 6\ 5)(3\ 10)$$

(3) Il minimo n tale che $\sigma^n = \mathrm{id}$ è dato dal minimo comune multiplo delle lunghezze dei cicli disgiunti, nel nostro caso 6, dato che i cicli hanno lunghezza 6 e 2. ❏