Matematica Discreta (II modulo)

Terzo appello, a.a. 1999/2000

4 settembre 2000

Esercizio 1 Si determinino le soluzioni della congruenza $x^3 \equiv 2 \mod 55$.

Esercizio 2 Si determini la soluzione dell'equazione ricorsiva lineare

$$x_{n+2} = 6x_{n+1} - 3x_n$$

con dati iniziali $x_0 = -2$ e $x_1 = 3$.

Si provi che se n è pari allora x_n è un intero pari e che se n è dispari, allora x_n è un intero dispari.

Esercizio 3 Siano X e Y insiemi finiti e $A \subset X$, $B \subset Y$. Si determini, in funzione delle cardinalità di X, Y, A e B, la cardinalità degli insiemi

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1 &= \left\{ f \in Y^X \;\middle|\; f(A) \subseteq B \right\} \\ \mathcal{F}_2 &= \left\{ f \in Y^X \;\middle|\; f \in \mathcal{F}_1 \text{ e } f \text{ è iniettiva} \right\} \end{aligned}$$

.

Esercizio 4 Sia $d = (2, 2, 2, 2, , 4, 4, 6, 6)$. Si provi che esiste un grafo G tale che score$(G) = d$ e se ne determini uno esplicitamente.

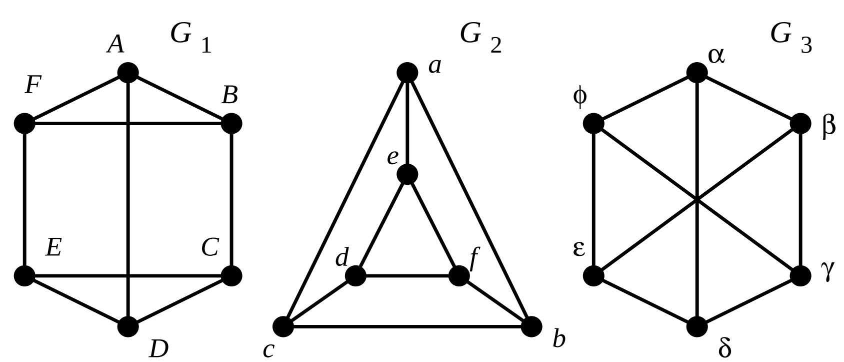
1. Si provi che ogni tale grafo G è euleriano.
2. Si determini un percorso euleriano per il grafo costruito esplicitamente.

Esercizio 5 Dati un grafo $G = (V, E)$ e $w \notin V$ denotiamo con $C_w(G)$ il grafo definito da:

$$\begin{aligned} V(C_w(G)) &= V \cup \{w\} \\ E(C_w(G)) &= E \cup \left\{ \{w, v\} \;\middle|\; v \in V \right\} \end{aligned}$$

Si provi che se G è connesso e ha più di due vertici, allora $C_w(G)$ è 2-connesso.

Esercizio 6 Dire quali dei tre seguenti grafi sono tra loro isomorfi e quali no.



Soluzioni proposte

Soluzione dell'esercizio 1 $(2, 55) = 1$, quindi 2 è invertibile in $\mathbb{Z}/_{55\mathbb{Z}}$. $55 = 5 \cdot 11$, quindi $\Phi(55) = 4 \cdot 10 = 40$, quindi $(3, 40) = 1$, pertanto esiste un unico $(\mod 40)$ d tale che $3d \equiv 1 \mod 40$. Determiniamo tale d.

$40 = 3 \cdot 13 + 1$, quindi $1 = 40 + (-13)3$ e quindi $3 \cdot (-13) \equiv 1 \mod 40$ ovvero $3 \cdot 27 \equiv 1 \mod 40$. Ovvero $d \equiv 27 \mod 40$.

Utilizzando il piccolo teorema di Fermat, si ottiene allora:

$$2^{3d} \equiv 2 \mod 55$$

ovvero $x \equiv 2^d = 2^{27} \mod 55$. Ma ora $2^6 = 64 \equiv 9 \mod 55$, quindi $2^{27} = (2^6)^4 2^3 \equiv 9^4 2^3 = 3^8 2^3 \mod 55$. Ora, $3^3 2 = 54 \equiv -1 \mod 55$, quindi $3^8 2^3 = (3^3 2)^2 3^2 2 \equiv (-1)^2 18 = 18 \mod 55$. Ovvero $x \equiv 18 \mod 55$. ❑

Soluzione dell'esercizio 2 Il polinomio caratteristico è dato da $x^2 - 6x + 3$ le cui radici sono $3 + \sqrt{6}$ e $3 - \sqrt{6}$, quindi una base dello spazio delle soluzioni è data dalle due successioni $a_n = (3 + \sqrt{6})^n$ e $b_n = (3 - \sqrt{6})^n$, quindi la soluzione generale dell'equazione è data da:

$$x_n = A(3 + \sqrt{6})^n + B(3 - \sqrt{6})^n \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Imponendo le condizioni iniziali si ottiene il sistema

$$\begin{cases} -2 = x_0 = A + B \\ 3 = x_1 = A(3 + \sqrt{6}) + B(3 - \sqrt{6}) \end{cases}$$

risolvendo il quale si ottiene $A = (9 - 2\sqrt{6})/2\sqrt{6}$ e $B = (-9 - 2\sqrt{6})/2\sqrt{6}$, e quindi la soluzione è:

$$x_n = (9 - 2\sqrt{6})(3 + \sqrt{6})^n / 2\sqrt{6} + (-9 - 2\sqrt{6})(3 - \sqrt{6})^n / 2\sqrt{6}.$$

❑

Soluzione dell'esercizio 3 (1). $f \in \mathcal{F}_1$, se e solo se $f|_A \in B^A$ e $f|_{X-A} \in Y^(X - A)$, possiamo quindi definire l'applicazione $\varphi : \mathcal{F}_1 \to B^A \times Y^{X-A}$ ponendo

$$\varphi(f) = (f|_A, f|_{X-A})$$

φ è iniettiva. Infatti $\varphi(f) = \varphi(g)$ se e solo se $f|_A = g_{|A}$, e $f|_{X-A} = g_{|X-A}$ e quindi $f = g$ (dato che coincidono su titti gli elementi di X.
φ è suriettiva. Infatti se $h \in B^X$ e $k \in Y^{X-A}$, allora è ben definita la funzione $f : X \to Y$ ponendo

$$f(x) = \left\langle \begin{array}{ll} h(x) & \text{se } x \in A \\ k(x) & \text{se } x \in X - A \end{array} \right.$$

È immediato verificare che $f \in \mathcal{F}_1$ e che $\varphi(f) = (h, k)$.

Ma allora φ è una bigezione, e quindi:

$$|\mathcal{F}|_1 = \left|B^A \times Y^{X-A}\right| = \left|B^A\right| \cdot \left|Y^{X-A}\right| = |B|^{|A|} \cdot |Y|^{|X-A|} = |B|^{|A|} \cdot |Y|^{|X|-|A|}$$

(2). Dati due insiemi U e V indichiamo con $\mathcal{I}(U, U)$ l'insieme delle applicazioni iniettive $U \to V$. Sappiamo che se U e V sono finiti, allora $|(U, V)| = |V|!/(|V| - |U|)!$.

Osserviamo che se $f \in \mathcal{F}_2$ se e solo se $f|_A \in \mathcal{I}(A, B)$ e $f|_{X-A} \in \mathcal{I}(X - A, Y - f(A))$. Quindi è ben definita l'applicazione $\varphi : \mathcal{F}_2 \to \mathcal{I}(A, B) \times Y^{X-A}$ ponendo

$$\varphi(f) = (f|_A, f|_{X-A})$$

la cui immagine è contenuta nell'insieme

$$\begin{aligned}\mathcal{B} &= \left\{(h,k) \in \mathcal{I}(A,B) \times Y^{X-A} \mid k \in \mathcal{I}(X-A, Y-h(A))\right\} = \\ &= \bigcup_{h \in \mathcal{I}(A,B)} \{h\} \times \mathcal{I}(X-A, Y-h(A)).\end{aligned}$$

Come nella dimostrazione di (1), si dimostra che φ è iniettiva e che la sua immagine è proprio $\mathcal{B}$. Quindi

$$\begin{aligned}|\mathcal{F}_2| &= |\mathcal{B}| = \sum_{h \in \mathcal{I}(A,B)} |\{h\} \times \mathcal{I}(X-A, Y-h(A))| = \\ &= \sum_{h \in \mathcal{I}(A,B)} |\mathcal{I}(X-A, Y-h(A))| = \\ &= \sum_{h \in \mathcal{I}(A,B)} \frac{|Y-h(A)|!}{(|Y-h(A)|-|X-A|)!} \\ &= \sum_{h \in \mathcal{I}(A,B)} \frac{(|Y|-|h(A)|)!}{(|Y|-|h(A)|-(|X|-|A|))!} \\ &= \sum_{h \in \mathcal{I}(A,B)} \frac{(|Y|-|A|)!}{(|Y|-|A|-(|X|-|A|))!} \\ &= \sum_{h \in \mathcal{I}(A,B)} \frac{(|Y|-|A|)!}{(|Y|-|X|)!} \\ &= \frac{|B|!}{(|B|-|A|)!} \frac{(|Y|-|A|)!}{(|Y|-|X|)!}\end{aligned}$$

dove si è usato il fatto che, essendo h iniettiva, $|h(A)| = |A|$ e che la somma di addendi tutti uguali è uguale al prodotto di uno di essi per il numero degli addendi. ❏

Soluzione dell'esercizio 4 Usiamo il teorema dello score.

$$\begin{aligned}d &= (2,2,2,2,,4,4,6,6) \\ d' &= (2,1,1,1,3,3,5) \\ d' &= (1,1,1,2,3,3,5) \\ d'' &= (1,0,0,1,2,2) \\ d'' &= (0,0,1,1,2,2) \\ d''' &= (0,0,1,0,1)\end{aligned}$$

d''' è realizzabile, quindi anche d lo è. Una realizzazione è data ad esempio dal grafo rappresentato in figura 1, in cui è anche descritto un percorso euleriano del grafo.

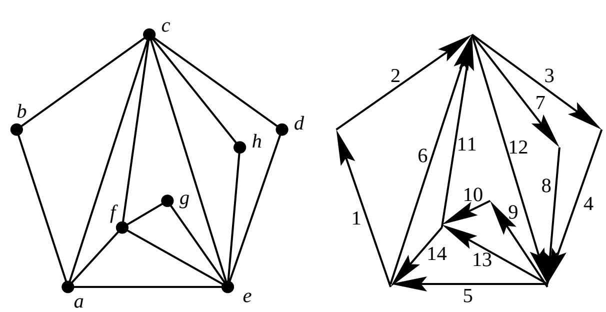


Figura 1: Un grafo che realizza lo score dell'esercizio 4 ed un suo percorso euleriano, dato da $(a,b,c,d,e,a,c,h,e,g,f,c,e,f,a)$

Per provare che ogni grafo G tale che score$(G) = d$ è euleriano, basta provare che ogni tale grafo è connesso. In tal cao infatti, dato che tutti i verici hanno grado pari, il teorema di caratterizzazione dei grafi euleriani garantisce la tesi.

Siano v_1 un vertice di grado 6 e siano $v_2, \ldots, v_7$ i vertici a lui adiacenti (i.e. $\{v_1, v_j\} \in E(G)$ per $j = 2, \ldots, 7$). Sia w il vertice rimanente, allora, dato che $\deg w \geq 2$, esiste i tale che $\{w, v_i\} \in E(G)$, pertanto (w, v_i, v_1) è un cammino che collega w a v_1. Ogni vertice è quindi collegabile al vertice v_1 e pertanto il grafo è connesso. ❑

Soluzione dell'esercizio 5 Dato che G ha almeno due vertici, $C_w(G)$ ne ha almeno 3. Osserviamo che $C_w(G) - w = G$ e quindi è connesso. Se invece $v \in V(G)$ allora

$$\begin{aligned}
V(C_w(G) - v) &= V(C_w(G)) - \{w\} = (V - \{v\}) \cup \{w\} = V(C_w(G - v)) \\
E(C_w(G) - v) &= E(C_w(G)) - \{e \in E(C_w(G)) \mid v \in e\} = \\
&= E \cup \big\{\{w, u\} \bigm| u \in V\big\} - \{e \in E \mid v \in e\} - \big\{\{v, w\}\big\} = \\
&= (E - \{e \in E \mid v \in e\}) \cup \big\{\{w, u\} \bigm| u \in V\{v\}\big\} = \\
&= E(G - v) \cup \big\{\{w, u\} \bigm| u \in V(G - v)\big\} = \\
&= E(C_w(G - v))
\end{aligned}$$

ossia $C_w(G) - v = C_w(G - v)$ e questo è connesso in quanto ogni vertice è adiacente a w. ❑

Soluzione dell'esercizio 6 G_1 e G_2 sono isomorfi. Un isomorfismo è dato ad esempio da:

$$\begin{array}{ll}
A \mapsto a & D \mapsto e \\
B \mapsto b & E \mapsto d \\
C \mapsto f & F \mapsto c
\end{array}$$

G_2 e G_3 non sono isomorfi, infatti G_2 contiene un 3-ciclo (a, b, c, a), (anzi due) mentre G_3 non ne contiene nessuno. Per vedere questo fatto si osservi che per ogni vertice v del grafo i tre vertici a lui adiacenti, non sono tra loro adiacenti. ❑