Matematica Discreta (I modulo)

Terzo appello, a.a. 1998/99

24 gennaio 2000

Da svolgersi in tre ore, senza l'ausilio di appunti e/o libri.
Si ricorda che, anche se non esplicitamente richiesto nei testi, tutte le risposte alle domande devono essere adeguatamente *motivate* con dimostrazioni o confutazioni.

Esercizio 1 Si provi che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha che

$$\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Esercizio 2 Si determini la soluzione dell'equazione ricorsiva lineare

$$x_{n+2} = -3x_{n+1} - 2x_n$$

con dati iniziali $x_0 = -2$ e $x_1 = 3$.

Esercizio 3 Sia G un gruppo e H un suo sottogruppo. Si consideri l'insieme

$$N_G(H) = \{g \in G \mid g^{-1}Hg = H\}.$$

dove $g^{-1}HG = \{g^{-1}hg \mid h \in H\}$. Si provi che $N_G(H)$ è un sottogruppo di G che contiene H. Si dica inoltre quale delle seguenti è vera:

1. $H \trianglelefteq G \iff N_G(H) = H$.
2. $H \trianglelefteq G \iff N_G(H) = G$.

Esercizio 4 Siano $(B, \vee, \wedge, ', 0, 1)$ un'algebra di Boole, $B' \subseteq B$ una sottoalgebra e $x \in B$ un elemento. Si provi che l'insieme

$$A = \{(a \wedge x) \vee (b \wedge x') \mid a, b \in B'\}$$

è la sottoalgebra $\langle B', x \rangle$ generata da B' e x (i.e. la più piccola sottoalgebra contenente sia B' che x).

Esercizio 5 Siano $\mathbb{F}$ e $\mathbb{K}$ due campi e si consideri l'anello prodotto diretto $\mathbb{F} \times \mathbb{K}$. Ricordiamo che le operazioni in $\mathbb{F} \times \mathbb{K}$ sono definite da $(f, k) + (f', k') = (f + f', k + k')$ e $(f, k)(f', k') = (ff', kk')$.

1. Si determinino gli elementi invertibili di $\mathbb{F} \times \mathbb{K}$.
2. Si determinino tutti gli ideali di $\mathbb{F} \times \mathbb{K}$.

Soluzioni proposte

Soluzione dell'esercizio 1 Procediamo per induzione su n. Per $n = 0$ la formula è banalmente vera.

Supponiamo che la formula valga per n, allora

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n+1} i^2 &= \sum_{i=0}^{n} i^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} = \frac{(n+1)(n(2n+1) + 6(n+1)}{6} = \\
&= \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6}{6} = \frac{(n+1)(2n+3)(n+2)}{6} = \\
&= \frac{(n+1)(2(n+1)+1)((n+1)+1)}{6}
\end{aligned}
$$

❑

Soluzione dell'esercizio 2 Il polinomio caratteristico è dato da $x^2 + 3x + 2$ le cui radici sono $-1i$ e -2, quindi una base dello spazio delle soluzioni è data dalle due successioni $a_n = (-1)^n$ e $b_n = (-1)^n$, quindi la soluzione generale dell'equazione è data da:

$$x_n = A(-1)^n + B(-2)^n \quad A, B \in \mathbb{C}.$$

Imponendo le condizioni iniziali si ottiene il sistema

$$\begin{cases} -2 = x_0 = A + B \\ 3 = x_1 = -A - 2B \end{cases}$$

risolvendo il quale si ottiene $A = B = -1$, e quindi la soluzione è:

$$x_n = -(-1)^n - (-2)^n = (-1)^{n+1}(1 + 2^n).$$

❑

Soluzione dell'esercizio 3 $1 \in N_G(H)$ in quanto $1^{-1}h1 = h \in H$ per ogni $h \in H$.

Siano $g_1, g_2 \in N_G(H)$, allora

$$(g_1g_2)^{-1}Hg_1g_2 = g_2^{-1}(g_1^{-1}Hg_1)g_2 = g_2^{-1}Hg_2 = H$$

e quindi $g_1g_2 \in N_G(H)$.

Sia $g \in N_G(H)$ allora

$$(g^{-1})^{-1}Hg^{-1} = gHg^{-1} = gg^{-1}Hgg^{-1} = H$$

e quindi $g^{-1} \in N_G(H)$.

Se $h \in H$ proviamo che $h^{-1}Hh = H$. Infatti se $h' \in H$ allora, dato che H è un sottogruppo, $h^{-1}h'h \in H$ e quindi $h^{-1}Hh \subseteq H$. D'altra parte se $h' \in H$ allora $hh'h^{-1} \in H$ e quindi $h = h^{-1}(hh'h^{-1})h \in h^{-1}Hh$, ossia $H \subseteq h^{-1}Hh$ e, per tanto $h^{-1}Hh = H$, ossia $h \in N_G(H)$.

Ricordiamo che uno dei modi equivalenti di dire che H è normale in G è che $g^{-1}Hg = H$ per ogni $g \in G$ e quindi se e solo se $g \in N_G(H)$ per ogni $g \in G$ ovvero se e solo se $G = N_G(H)$. ❑

Soluzione dell'esercizio 4 Osserviamo che se B'' è una sottoalgebra che contiene sia B' che x, allora anche $x' \in B''$ e quindi per ogni $a, b \in B'$ si ha che $a \wedge x \in B''$, $b \wedge x' \in B''$ e quindi anche $(a \wedge x) \vee (b \wedge x') \in B''$, ossia $A \subseteq B''$. Basta allora provare che A è una sottoalgebra, ossia che è chiusa rispetto a $\vee$, $\wedge$ e $'$ e che contiene $0, 1$.

Dato che B' è una sottoalgebra, $0, 1 \in B'$ e quindi

$$\begin{aligned} 0 &= 0 \vee 0 = (0 \wedge x) \vee (0 \wedge x') \in A \\ 1 &= x \vee x' = (1 \wedge x) \vee (1 \wedge x') \in A. \end{aligned}$$

Siano $(a_1 \wedge x) \vee (b_1 \wedge x')$, $(a_2 \wedge x) \vee (b_2 \wedge x') \in A$, allora

$$\begin{aligned} &((a_1 \wedge x) \vee (b_1 \wedge x')) \vee ((a_2 \wedge x) \vee (b_2 \wedge x')) = \\ &\qquad = ((a_1 \wedge x) \vee (a_2 \wedge x)) \vee ((b_1 \wedge x') \vee (b_2 \wedge x')) = \\ &\qquad = (a_1 \vee a_2) \wedge x) \vee (b_1 \vee b_2 \wedge x') \end{aligned}$$

che appartiene ad A in quanto $a_1 \vee a_2$, $b_1 \vee b_2 \in B'$.

Siano $(a_1 \wedge x) \vee (b_1 \wedge x')$, $(a_2 \wedge x) \vee (b_2 \wedge x') \in A$, allora

$$\begin{aligned} &((a_1 \wedge x) \vee (b_1 \wedge x')) \wedge ((a_2 \wedge x) \vee (b_2 \wedge x')) = \\ &\qquad = ((a_1 \wedge x) \wedge (a_2 \wedge x)) \vee ((a_1 \wedge x) \wedge (b_2 \wedge x')) \vee \\ &\qquad\quad ((b_1 \wedge x') \wedge (a_2 \wedge x)) \vee ((b_1 \wedge x') \wedge (b_2 \wedge x')) = \\ &\qquad = ((a_1 \wedge a_2) \wedge x) \vee ((b_1 \wedge b_2) \wedge x') \end{aligned}$$

che appartiene ad A in quanto $a_1 \wedge a_2$, $b_1 \wedge b_2 \in B'$.

Sia $(a \wedge x) \vee (b \wedge x') \in A$, allora

$$\begin{aligned} ((a \wedge x) \vee (b \wedge x'))' &= (a \wedge x)' \wedge (b \wedge x')' = (a' \vee x') \wedge (b' \vee x) \\ &= (a' \wedge b') \vee (a' \wedge x) \vee (x' \wedge b') \vee (x' \wedge x) = \\ &= (a' \wedge b') \vee (a' \wedge x) \vee (x' \wedge b') = \\ &= ((a' \wedge b') \wedge 1) \vee (a' \wedge x) \vee (x' \wedge b') = \\ &= ((a' \wedge b') \wedge (x \vee x')) \vee (a' \wedge x) \vee (x' \wedge b') = \\ &= (a' \wedge b' \wedge x) \vee (a' \wedge b' \wedge x') \vee (a' \wedge x) \vee (x' \wedge b') = \\ &= (((a' \wedge x) \wedge b') \vee (a' \wedge x)) \vee ((a' \wedge (b' \wedge x')) \vee (b' \wedge x)) = \\ &= (a' \wedge x) \vee (b' \wedge x) \end{aligned}$$

che appartiene ad A in quanto a', $b' \in B'$. $\square$

Soluzione dell'esercizio 5 L'unità dell'anello $\mathbb{F} \times \mathbb{K}$ è $(1_{\mathbb{F}}, 1_{\mathbb{K}})$. Ma allora, perché un elemento $(f, k) \in \mathbb{F} \times \mathbb{K}$ sia invertibile, dovranno essere invertibili entrambe le sue coordinate, e quindi, dato che $\mathbb{F}$ e $\mathbb{K}$ sono campi, ciò equivale a dire che entrambe le coordinate siano diverse da 0. Quindi l'insieme degli elementi invertibili è dato da:

$$\mathbb{F}^* \times \mathbb{K}^* = \{(f, k) \in \mathbb{F} \times \mathbb{K} \mid f \neq 0,\ k \neq 0\}.$$

Proviamo che $\mathbb{F} \times \mathbb{K}$ possiede soltanto i quattro ideali: $\langle 0 \rangle$, $\mathbb{F} \times \{0\}$, $\{0\} \times \mathbb{K}$ e $\mathbb{F} \times \mathbb{K}$. Proviamo innanzitutto che $\mathbb{F} \times \{0\}$ e $\{0\} \times \mathbb{K}$ sono ideali. Sono ovviamente chiusi rispetto alla somma, inoltre se $(f, 0) \in \mathbb{F} \times \{0\}$ e $(f', k') \in \mathbb{F} \times \mathbb{K}$ allora $(f, 0)(f', k') = (ff', 0) \in \mathbb{F} \times \{0\}$, e analogamente per l'altro ideale.

Proviamo ora che non ci sono altri ideali. Sia I un ideale non banale di $\mathbb{F} \times \mathbb{K}$ (ossia $I \neq \langle 0 \rangle$ e $I \neq \mathbb{F} \times \mathbb{K}$). Sia $(0, 0) \neq (f, k) \in I$. Se f e k sono entrambi non nulli allora (f, k) è invertibile e quindi $I = \mathbb{F} \times \mathbb{K}$, contro l'assunto (ricordiamo che se un ideale contiene un elemento invertibile, allora coincide con tutto l'anello). Supponiamo che $k = 0$, allora $(1, 0) = (f, 0)(f^{-1}, 0) \in I$ e quindi per ogni $g \in \mathbb{F}$ si ha che $(g, 0) = (1, 0)(g, 0) \in I$ e quindi $\mathbb{F} \times \{0\} \subseteq I$. D'altra parte se esistesse un elemento $(0, k) \in I$ con $k \neq 0$ allora $(1, k) = (1, 0) + (0, k) \in I$ sarebbe un elemento invertibile e quindi $I = \mathbb{F} \times \mathbb{K}$, contro quanto supposto, per tanto $I = \mathbb{F} \times \{0\}$.

In modo analogo si prova che se $(0, k) \in I$ allora $I = \{0\} \times \mathbb{K}$. $\square$