

CORSI DI LAUREA IN MATEMATICA E FISICA

FOGLIO DI ESERCIZI # 12- GEOMETRIA 1

Esercizio 12.1. Si dica se la matrice $A \in M_3(\mathbb{R})$ definita ponendo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}^1$$

è diagonalizzabile (via similitudine) e, in caso affermativo, si calcoli una base di \mathbb{R}^3 diagonalizzante per l'operatore lineare $L_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ associato ad A ² e una matrice $M \in GL_3(\mathbb{R})$ tale che $M^{-1}AM$ è diagonale.

Si ripeta lo stesso esercizio con le seguenti matrici B e C al posto della matrice A :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \quad e \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 12.2. Si dica se la matrice $A \in M_3(\mathbb{C})$ definita ponendo

$$A = \begin{pmatrix} 2i & -i & 2 \\ 2i & -i & 2 \\ 1 & -1 & -i \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile (via similitudine) e, in caso affermativo, si calcoli una base di \mathbb{C}^3 diagonalizzante per l'operatore lineare $L_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ associato ad A e una matrice $M \in GL_3(\mathbb{C})$ tale che $M^{-1}AM$ è diagonale.

Esercizio 12.3. Si dica se la matrice $A \in M_4(\mathbb{R})$ definita ponendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile (via similitudine) e, in caso affermativo, si calcoli una base di \mathbb{R}^4 diagonalizzante per l'operatore lineare $L_A : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ associato ad A e una matrice $M \in GL_4(\mathbb{R})$ tale che $M^{-1}AM$ è diagonale.

Esercizio 12.4. Si dica per quali valori del parametro $t \in \mathbb{R}$ la seguente matrice

$$A_t = \begin{pmatrix} t+1 & t & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & t \\ -t & -t & 1-t & 0 \\ t & t & t & 1 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$$

è diagonalizzabile (via similitudine).

Esercizio 12.5 (Diagonalizzazione simultanea). Siano A e B due matrici in $M_n(\mathbb{K})$ diagonalizzabili. Si dimostri che le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- (i) A e B sono simultaneamente diagonalizzabili, cioè esiste $M \in GL_n(\mathbb{K})$ tale che le matrici $M^{-1}AM$ e $M^{-1}BM$ sono diagonali.
- (ii) $AB = BA$.

¹Si tratta della matrice considerata nell'Esercizio 9, p. 190 del Sernesi.

²Si ricordi che L_A è l'operatore definito ponendo $L_A(x) := Ax$ per ogni $x \in \mathbb{R}^3$.

SOLUZIONE:

Se esiste $M \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ tale che $D_A := M^{-1}AM$ e $D_B := M^{-1}BM$ sono diagonali, allora si ha:

$$AB = (MD_A M^{-1})(MD_B M^{-1}) = MD_A D_B M^{-1} = MD_B D_A M^{-1} = (MD_B M^{-1})(MD_A M^{-1}) = BA.$$

Supponiamo ora che $AB = BA$. Dobbiamo provare che esiste una base di \mathbb{K}^n formata di autovettori comuni di A e di B . Poiché A è diagonalizzabile, A ha tutti gli autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ in \mathbb{K} e vale:

$$(1) \quad \mathbb{K}^n = \mathbb{V}_{\lambda_1}(A) \oplus \dots \oplus \mathbb{V}_{\lambda_k}(A).$$

Proviamo che ogni autospazio $\mathbb{V}_{\lambda_j}(A)$ è L_B -invariante, cioè $Bv \in \mathbb{V}_{\lambda_j}(A)$ per ogni $v \in \mathbb{V}_{\lambda_j}(A)$. Sia $j \in \{1, \dots, k\}$ e sia $v \in \mathbb{V}_{\lambda_j}(A)$. Vale:

$$A(Bv) = B(Av) = B(\lambda_j v) = \lambda_j(Bv),$$

ovvero $Bv \in \mathbb{V}_{\lambda_j}(A)$ come desiderato.

Sia $\mathcal{B} = (w_1, \dots, w_n)$ una base di \mathbb{K}^n diagonalizzante per B , cioè costituita da autovettori di B (che esiste per ipotesi). Scegliamo $\ell \in \{1, \dots, n\}$ e denotiamo con $\mu_\ell \in \mathbb{K}$ l'autovalore di B relativo a w_ℓ . Grazie a (1), esistono, e sono unici, $x_{\ell,1} \in \mathbb{V}_{\lambda_1}(A), \dots, x_{\ell,k} \in \mathbb{V}_{\lambda_k}(A)$ tali che

$$w_\ell = x_{\ell,1} + \dots + x_{\ell,k}.$$

Si osservi che almeno un $x_{\ell,j} \neq 0$ perché $w_\ell \neq 0$ (essendo un autovettore di B). A meno di riordinare gli indici possiamo supporre che $x_{\ell,1} \neq 0, \dots, x_{\ell,k_\ell} \neq 0$, mentre $x_{\ell,k_\ell+1} = \dots = x_{\ell,k} = 0$ per qualche $k_\ell \in \{1, \dots, k\}$. Si ha:

$$w_\ell = x_{\ell,1} + \dots + x_{\ell,k_\ell}$$

e

$$\mu_\ell x_{\ell,1} + \dots + \mu_\ell x_{\ell,k_\ell} = \mu_\ell w_\ell = Bw_\ell = Bx_{\ell,1} + \dots + Bx_{\ell,k_\ell},$$

dove ogni $Bx_{\ell,j} \in \mathbb{V}_{\lambda_j}(A)$ perché $\mathbb{V}_{\lambda_j}(A)$ è L_B -invariante. Poiché la somma in (1) è diretta, segue che:

$$Bx_{\ell,j} = \mu_\ell x_{\ell,j} \quad \text{per ogni } j \in \{1, \dots, k_\ell\}.$$

Il sottoinsieme $S = \{x_{1,1}, \dots, x_{1,k_1}, \dots, x_{n,1}, \dots, x_{n,k_n}\}$ di \mathbb{K}^n è dunque costituito da autovettori comuni di A e B , e genera tutto \mathbb{K}^n perché ogni vettore w_ℓ della base \mathcal{B} di \mathbb{K}^n è uguale alla somma di alcuni elementi di S . È ora sufficiente estrarre una base di \mathbb{K}^n da S . ■

Esercizio 12.6 (Invarianti per similitudine). Siano $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ due matrici simili. Allora si ha:

- (i) $\text{rk}(A) = \text{rk}(B)$.
- (ii) $\text{tr}(A) = \text{tr}(B)$ e $\det(A) = \det(B)$.
- (iii) $P_A = P_B$.
- (iv) $\sigma(A) = \sigma(B)$ e, per ogni $\lambda \in \sigma(A) = \sigma(B)$, $\text{ma}(\lambda, A) = \text{ma}(\lambda, B)$ e $\text{mg}(\lambda, A) = \text{mg}(\lambda, B)$ ³.

Esercizio 12.7 (Triangolazione). Sia $A \in M_n(\mathbb{K})$ una matrice avente tutti gli autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (eventualmente ripetuti) in \mathbb{K} . Allora A è simile ad una matrice triangolare superiore, ovvero esistono una matrice $M \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ e una matrice triangolare superiore $S \in M_n(\mathbb{K})$ con elementi diagonali $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tali che $S = M^{-1}AM$.

Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ (rispettivamente $\mathbb{K} = \mathbb{R}$), allora M può essere scelta unitaria (rispettivamente ortogonale)⁴.

SOLUZIONE:

Procediamo per induzione su $n \geq 1$.

$n = 1$ Ogni matrice 1×1 è triangolare superiore.

$n \implies n + 1$. Supponiamo che $A \in M_{n+1}(\mathbb{K})$ abbia tutti gli autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda_{n+1}$ in \mathbb{K} . Sia v_1 un autovettore di A . Completiamo v_1 ad una base $\mathcal{B} = (v_1, w_2, \dots, w_{n+1})$ di \mathbb{K}^{n+1} . Se \mathcal{C}_{n+1} indica la base canonica di \mathbb{K}^{n+1} e $P \in \text{GL}_{n+1}(\mathbb{K})$ la matrice $\mathcal{M}_{\mathcal{C}_{n+1}, \mathcal{B}}(\mathbf{1}_{\mathbb{K}^{n+1}})$ di cambiamento di coordinate da \mathcal{B} a \mathcal{C}_{n+1} , allora vale:

$$\left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & \mathbf{c} \\ \hline \mathbf{0} & A_1 \end{array} \right) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(L_A) = (\mathcal{M}_{\mathcal{C}_{n+1}, \mathcal{B}}(\mathbf{1}_{\mathbb{K}^{n+1}}))^{-1} \mathcal{M}_{\mathcal{C}_{n+1}}(L_A) \mathcal{M}_{\mathcal{C}_{n+1}, \mathcal{B}}(\mathbf{1}_{\mathbb{K}^{n+1}}) = P^{-1}AP$$

per qualche $\mathbf{c} \in M_{1,n}(\mathbb{K})$ e $A_1 \in M_n(\mathbb{K})$, dove $\mathbf{0} \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ è il vettore nullo. Poiché $P_A(T) = (\lambda_1 - T)P_{A_1}(T)$, A_1 ha tutti gli autovalori in \mathbb{K} e tali autovalori sono uguali a $\lambda_2, \dots, \lambda_{n+1}$. Per ipotesi induttiva,

³In generale, le proprietà (i), (ii), (iii) e (iv) sono necessarie ma non sufficienti affinché A e B siano simili: si veda l'Esercizio 12.17).

⁴In questi due casi, la matrice S è detta *forma canonica (o normale) di Schur di A* .

esiste $S_1 \in M_n(\mathbb{K})$ triangolare superiore e $P_1 \in GL_n(\mathbb{K})$ tale che $S_1 = P_1^{-1}A_1P_1$. Definiamo $M \in GL_{n+1}(\mathbb{K})$ come il seguente prodotto matriciale:

$$M := P \cdot \left(\begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{0}^T \\ \hline \mathbf{0} & P_1 \end{array} \right).$$

Vale:

$$\begin{aligned} M^{-1}AM &= \left(\begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{0}^T \\ \hline \mathbf{0} & P_1 \end{array} \right)^{-1} \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & \mathbf{c} \\ \hline \mathbf{0} & A_1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{0}^T \\ \hline \mathbf{0} & P_1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{0}^T \\ \hline \mathbf{0} & P_1^{-1} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & \mathbf{c}P_1 \\ \hline \mathbf{0} & A_1P_1 \end{array} \right) = \\ &= \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & \mathbf{c}P_1 \\ \hline \mathbf{0} & S_1 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Poiché quest'ultima matrice è triangolare superiore, la dimostrazione è completa.

Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ e si desidera che M sia unitaria, allora si può procedere per induzione come sopra. L'unica differenza sta nella scelta di v_1 che deve essere un versore e della base \mathcal{B} che deve essere ortonormale. Simili considerazioni si possono ripetere nel caso reale. ■

Esercizio 12.8. Sia $Q(X) = a_dX^d + a_{d-1}X^{d-1} + \dots + a_1X + a_0$ un polinomio in $\mathbb{K}[X]$. Per ogni $A \in M_n(\mathbb{K})$, definiamo la matrice $Q(A) \in M_n(\mathbb{K})$ ponendo:

$$Q(A) := a_dA^d + a_{d-1}A^{d-1} + \dots + a_1A + a_0I_n.$$

Si dimostrino le seguenti affermazioni:

- (i) Se $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ sono simili, allora anche $Q(A)$ e $Q(B)$ lo sono.
- (ii) Se $A \in M_n(\mathbb{K})$ ha tutti gli autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (eventualmente ripetuti) in \mathbb{K} , allora $Q(\lambda_1), \dots, Q(\lambda_n)$ sono tutti gli autovalori (eventualmente ripetuti) di $Q(A)$.

Esercizio 12.9. Si provi che, se $A \in M_n(\mathbb{K})$ ha tutti gli autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ (eventualmente ripetuti) in \mathbb{K} , allora valgono:

- (i) $\text{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$.
- (ii) $\det(A) = \lambda_1\lambda_2 \cdots \lambda_n$.
- (iii) Se $P_A(T) = (-1)^nT^n + a_{n-1}T^{n-1} + \dots + a_1T + a_0$ è il polinomio caratteristico di A , allora $\text{tr}(A) = (-1)^{n-1}a_{n-1}$ e $\det(A) = a_0$.

Esercizio 12.10. Sia $A \in M_n(\mathbb{K})$ una matrice diagonale a blocchi della seguente forma:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & A_k \end{pmatrix},$$

dove $A_1 \in M_{m_1}(\mathbb{K}), \dots, A_k \in M_{m_k}(\mathbb{K})$ per qualche $m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N}^*$ con $m_1 + \dots + m_k = n$. Sia p una permutazione di $\{1, 2, \dots, k\}$ e sia A_p la matrice diagonale a blocchi ottenuta riordinando gli elementi diagonali di A secondo p :

$$A_p := \begin{pmatrix} A_{p(1)} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_{p(2)} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & A_{p(k)} \end{pmatrix}.$$

Si dimostri che A e A_p sono simili, e si calcoli una matrice $M_p \in GL_n(\mathbb{K})$ tale che $A_p = M_p^{-1}AM_p$.

SOLUZIONE:

Per ogni $h \in \{1, \dots, k+1\}$, definiamo $m_h^* := m_1 + \dots + m_{h-1}$, dove $m_1^* := 0$. Si osservi che $m_{h+1}^* = m_h^* + m_h$ se $h < k+1$. Indichiamo con $\mathbf{C}_n = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonica di \mathbb{K}^n . Definiamo la base \mathcal{B} di \mathbb{K}^n ponendo

$$\mathcal{B} := (e_{m_{p(1)}^*+1}, \dots, e_{m_{p(1)}^*+m_{p(1)}}, e_{m_{p(2)}^*+1}, \dots, e_{m_{p(2)}^*+m_{p(2)}}, \dots, e_{m_{p(k)}^*+1}, \dots, e_{m_{p(k)}^*+m_{p(k)}})$$

e denotiamo con M_p la matrice $\mathcal{M}_{\mathcal{C}_n, \mathcal{B}}(\mathbf{1}_{\mathbb{K}^n})$ di cambiamento di coordinate da \mathcal{B} a \mathcal{C}_n . Osserviamo che $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(L_A) = A_p$ e quindi vale:

$$A_p = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(L_A) = (\mathcal{M}_{\mathcal{C}_n, \mathcal{B}}(\mathbf{1}_{\mathbb{K}^n}))^{-1} \mathcal{M}_{\mathcal{C}_n}(L_A) \mathcal{M}_{\mathcal{C}_n, \mathcal{B}}(\mathbf{1}_{\mathbb{K}^n}) = M_p^{-1} A M_p.$$

In particolare A e A_p sono simili. ■

Forma canonica di Jordan e criterio di similitudine. Sia \mathbb{K} un campo, sia $m \in \mathbb{N}^*$ e sia $\lambda \in \mathbb{K}$. La matrice triangolare superiore $J_m(\lambda) \in M_m(\mathbb{K})$ avente λ sulla diagonale principale, 1 sulla sopradiagonale (cioè in posizione $(i, i+1)$ con $i \in \{1, \dots, m-1\}$) e 0 altrove è detta *blocco di Jordan di ordine m relativo a λ* ⁵:

$$J_m(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Una matrice $J \in M_n(\mathbb{K})$ è detta *matrice in forma canonica di Jordan* se è una matrice diagonale a blocchi con elementi diagonali uguali a blocchi di Jordan, ovvero è della seguente forma:

$$J = \begin{pmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & J_{n_2}(\lambda_2) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & J_{n_s}(\lambda_s) \end{pmatrix}$$

per qualche $n_1, \dots, n_s \in \mathbb{N}^*$ (non necessariamente distinti) con $n_1 + \dots + n_s = n$ e per qualche $\lambda_1, \dots, \lambda_s \in \mathbb{K}$ (non necessariamente distinti), ove i vari $\mathbf{0}$ indicano matrici nulle di opportuni ordini.

Ricordiamo il teorema di Jordan.

Teorema (Jordan). *Sia A una matrice in $M_n(\mathbb{K})$ avente tutti gli autovalori in \mathbb{K} (ovvero il cui polinomio caratteristico P_A ha tutte le radici in \mathbb{K}). Allora A è simile ad una matrice in forma canonica di Jordan, che è unica a meno di permutazioni dei blocchi di Jordan che la compongono.*

Più precisamente, vale ciò che segue. Sia $P_A(T) = (-1)^n (T - \lambda_1)^{m_1} (T - \lambda_2)^{m_2} \cdots (T - \lambda_k)^{m_k}$ con $\lambda_i \neq \lambda_j$ se $i \neq j$, ovvero $\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ e $m_h = \text{ma}(\lambda_h, A)$ per ogni $h \in \{1, \dots, k\}$. Allora A è simile ad una matrice $J \in M_n(\mathbb{K})$ ⁶ in forma canonica di Jordan del tipo:

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & J_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & J_k \end{pmatrix},$$

dove ogni $J_h \in M_{m_h}(\mathbb{K})$ è a sua volta una matrice in forma canonica di Jordan di ordine m_h avente solo l'autovalore λ_h e del tipo seguente:

$$J_h = \begin{pmatrix} J_{n_{h,1}}(\lambda_h) & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & J_{n_{h,2}}(\lambda_h) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & J_{n_{h,g_h}}(\lambda_h) \end{pmatrix}$$

per qualche $n_{h,1}, \dots, n_{h,g_h} \in \mathbb{N}^*$ con $n_{h,1} + \dots + n_{h,g_h} = m_h$ e per ogni $h \in \{1, \dots, k\}$. La matrice J è unica a meno di permutazioni dei blocchi $J_{n_{h,\ell}}(\lambda_h)$ di Jordan che la compongono.

Segue che, a meno di permutazioni dei blocchi di Jordan che la compongono, la matrice J è univocamente determinata dal numero g_h dei blocchi di Jordan $\{J_{n_{h,\ell}}(\lambda_h)\}_{\ell=1}^{g_h}$ relativi all'autovalore λ_h e dagli ordini $n_{h,\ell}$ dei blocchi $\{J_{n_{h,\ell}}(\lambda_h)\}_{\ell=1}^{g_h}$ stessi, per ogni $h \in \{1, \dots, k\}$.

⁵Se $m = 1$, allora $J_m(\lambda) = (\lambda) = \lambda \in M_1(\mathbb{K}) = \mathbb{K}$.

⁶La matrice J è usualmente detta *forma canonica di Jordan di A* .

Esercizio 12.11. Siano $A \in M_n(\mathbb{K})$ e $J \in M_n(\mathbb{K})$ come sopra. Si dimostri che, per ogni $h \in \{1, \dots, k\}$, il numero g_h dei blocchi di Jordan di J relativi all'autovalore λ_h coincide con la molteplicità geometrica di λ_h per A , cioè vale:

$$g_h = \text{mg}(\lambda_h, A).$$

Dedurre da queste uguaglianze il seguente criterio di diagonalizzabilità: "Una matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ è diagonalizzabile (su \mathbb{K}) se ha tutti gli autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ in \mathbb{K} e se $\text{mg}(\lambda_h, A) = \text{ma}(\lambda_h, A)$ per ogni $h \in \{1, \dots, k\}$ ".

SOLUZIONE:

Sia $p \in \{1, \dots, k\}$. Ricordiamo che $\text{mg}(\lambda_p, J) = \text{mg}(\lambda_p, A)$. Infatti, se M è una matrice in $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ tale che $J = M^{-1}AM$, allora $J - \lambda_p I_n = M^{-1}(A - \lambda_p I_n)M$, $\text{rk}(J - \lambda_p I_n) = \text{rk}(A - \lambda_p I_n)$ e quindi

$$\text{mg}(\lambda_p, J) = n - \text{rk}(J - \lambda_p I_n) = n - \text{rk}(A - \lambda_p I_n) = \text{mg}(\lambda_p, A).$$

Dobbiamo dunque provare che $g_p = \text{mg}(\lambda_p, J)$. La matrice $J - \lambda_p I_n$ è in forma canonica di Jordan ed ha per elementi diagonali i blocchi di Jordan $J_{n_{h,\ell}}(\lambda_h) - \lambda_p I_{n_{h,\ell}}$ con $h \in \{1, \dots, k\}$ e $\ell \in \{1, \dots, g_h\}$. Osserviamo che le g_p colonne di $J - \lambda_p I_n$ corrispondenti ai primi elementi diagonali dei blocchi $\{J_{n_{p,\ell}}(\lambda_p) - \lambda_p I_{n_{p,\ell}}\}_{\ell=1}^{g_p}$ e le g_p righe di $J - \lambda_p I_n$ corrispondenti agli ultimi elementi diagonali dei blocchi $\{J_{n_{p,\ell}}(\lambda_p) - \lambda_p I_{n_{p,\ell}}\}_{\ell=1}^{g_p}$ sono nulle. Cancellando tali righe e colonne da $J - \lambda_p I_n$ otteniamo una matrice J' triangolare superiore avente stesso rango di $J - \lambda_p I_n$ con i seguenti elementi diagonali: 1 ripetuto $m_p - g_p$ volte e $\lambda_h - \lambda_p$ ripetuto m_h volte per ogni $h \in \{1, \dots, k\} \setminus \{p\}$. Segue che $\det(J') \neq 0$, $n - g_p = \text{rk}(J') = \text{rk}(J - \lambda_p I_n)$ e quindi $\text{mg}(\lambda_p, J) = n - \text{rk}(J - \lambda_p I_n) = g_p$ come desiderato.

Un blocco di Jordan $J_n(\lambda)$ è diagonalizzabile se e soltanto se $n = 1$ (vedi Osservazione 13.15(3), pp. 171–172 del Sernesi). Segue che A è diagonalizzabile se e soltanto se J è diagonale, ovvero se e soltanto se, per ogni $h \in \{1, \dots, k\}$, sono presenti $g_h = m_h$ blocchi di Jordan di ordine 1 relativi a λ_h , che coincide col suddetto criterio. ■

Esercizio 12.12 (Criterio di similitudine: caso di molteplicità algebriche ≤ 3). Siano A e B due matrici in $M_n(\mathbb{K})$ aventi tutti gli autovalori in \mathbb{K} . Supponiamo che tutti gli autovalori di A e tutti gli autovalori di B abbiano molteplicità algebrica ≤ 3 . Si dimostri l'equivalenza tra le seguenti affermazioni:

- (2a) A è simile a B .
- (2b) A e B hanno la stessa forma canonica di Jordan (a meno di permutazioni dei blocchi di Jordan che la compongono).
- (2c) A e B hanno gli stessi autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ con la stessa molteplicità algebrica e geometrica.
- (2d) A e B hanno lo stesso polinomio caratteristico $(-1)^n(T - \lambda_1)^{m_1}(T - \lambda_2)^{m_2} \dots (T - \lambda_k)^{m_k}$ e $\text{mg}(\lambda_h, A) = \text{mg}(\lambda_h, B)$ per ogni $h \in \{1, \dots, k\}$.⁷

SOLUZIONE:

L'equivalenza tra (2a) e (2b) segue subito dal teorema di Jordan. L'equivalenza tra (2c) e (2d) è evidente. L'implicazione (2a) \implies (2c) è ben nota (vedi Esercizio 12.6(iv)).

Resta da dimostrare l'implicazione (2c) \implies (2b). Sia J la forma canonica di Jordan di A . Dobbiamo provare che, a meno di permutazione dei blocchi di Jordan che la compongono, J è univocamente determinata dalle molteplicità algebriche e geometriche dei suoi autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_k$. Sia $h \in \{1, \dots, k\}$, sia $m_h := \text{ma}(\lambda_h, A)$ e $g_h := \text{mg}(\lambda_h, A)$. Il numero di blocchi di Jordan relativi a λ_h presenti in J è uguale a g_h ⁸ e la somma degli ordini di tali blocchi è uguale a m_h (vedi il teorema di Jordan). Siano $J_{n_1}(\lambda_h), \dots, J_{n_{g_h}}(\lambda_h)$ i blocchi di Jordan relativi a λ_h presenti in J . Come abbiamo già osservato vale: $n_1 + \dots + n_{g_h} = m_h$. Per ipotesi $m_h \leq 3$, dunque possiamo distinguere i seguenti casi:

- Caso 1: $m_h = g_h = 1$. In J è presente, relativamente a λ_h , il solo blocco di Jordan $J_1(\lambda_h) = (\lambda_h)$.
- Caso 2': $m_h = 2, g_h = 1$. In J è presente, relativamente a λ_h , il solo blocco di Jordan $J_2(\lambda_h)$.
- Caso 2'': $m_h = g_h = 2$. In J sono presenti, relativamente a λ_h , esattamente due blocchi di Jordan di ordine 1. In altri termini la matrice in forma di Jordan costituita dai blocchi di Jordan relativi a λ_h presenti in J (che nell'enunciato del teorema di Jordan viene indicato con J_h) è uguale a $\lambda_h I_2$.

⁷Si può dimostrare anche ciò che segue: "Sia $A \in M_n(\mathbb{K})$ una matrice con tutti gli autovalori in \mathbb{K} e sia J la forma canonica di Jordan di A . Allora, per ogni $\lambda \in \sigma(A)$ e per ogni $s \in \mathbb{N}^*$, il numero di blocchi $J_s(\lambda)$ di Jordan di ordine s relativi a λ che compaiono in J è uguale a $\text{rk}((A - \lambda I_n)^{s+1}) - 2\text{rk}((A - \lambda I_n)^s) + \text{rk}((A - \lambda I_n)^{s-1})$ ". Una conseguenza immediata di quest'ultimo fatto è il seguente **criterio generale di similitudine**: "Siano A e B due matrici in $M_n(\mathbb{K})$ aventi tutti gli autovalori in \mathbb{K} . Allora A e B sono simili se e soltanto se $\sigma(A) = \sigma(B)$ e $\text{rk}((A - \lambda I_n)^s) = \text{rk}((B - \lambda I_n)^s)$ per ogni $\lambda \in \sigma(A) = \sigma(B)$ e per ogni $s \in \{1, \dots, n\}$ ".

⁸Vedi esercizio precedente.

- Caso 3': $m_h = 3, g_h = 1$. In J è presente, relativamente a λ_h , il solo blocco di Jordan $J_3(\lambda_h)$.
- Caso 3'': $m_h = 3, g_h = 2$. In questo caso sono presenti due blocchi di Jordan di ordini n_1 e n_2 relativamente a λ_h con $n_1 + n_2 = 3$ e $n_1, n_2 \in \mathbb{N}^*$. Le soluzioni di questa equazione sono solo due: $(n_1, n_2) = (1, 2)$ e $(n_1, n_2) = (2, 1)$. Poiché tali soluzioni sono simmetriche, a meno di trasporre i blocchi di Jordan, in J sono presenti, relativamente a λ_h , esattamente due blocchi di Jordan, uno di ordine 2 e l'altro di ordine 1. In altri parole J_h ha la seguente forma:

$$J_h = \left(\begin{array}{cc|c} \lambda_h & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_h & 0 \\ \hline 0 & 0 & \lambda_h \end{array} \right).$$

- Caso 3''': $m_h = g_h = 3$. In J sono presenti, relativamente a λ_h , esattamente tre blocchi di Jordan di ordine 1. In altri termini $J_h = \lambda_h I_3$.

NOTA. Le precedenti considerazioni permettono di calcolare la forma canonica di Jordan di ogni matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ avente tutti gli autovalori in \mathbb{K} e con molteplicità algebrica ≤ 3 (in particolare se $n \leq 3$). ■

Esercizio 12.13. Si calcoli la forma canonica di Jordan delle seguenti matrici $A, B, C, D \in M_3(\mathbb{R})$ ⁹ e si dica quali sono simili tra loro:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & \frac{5}{2} \\ 2 & -2 & 1 \\ -5 & \frac{3}{2} & -4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -5 & 4 & -1 \\ -4 & 1 & -2 \\ 8 & -4 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} & \frac{5}{4} \\ 0 & -11 & -30 \\ 0 & 4 & 11 \end{pmatrix} \text{ e } D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 12.14. Si calcoli la forma canonica di Jordan delle seguenti matrici $A, B \in M_4(\mathbb{R})$ ¹⁰ e si dica se sono simili:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3/2 & -1 \\ 0 & 1 & -3/2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 5/2 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 12.15. Si determinino i valori di $t \in \mathbb{R}$ per cui le seguenti matrici $A_t, B_t \in M_4(\mathbb{R})$ sono simili:

$$A_t = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 & 1 \\ 0 & t & 1 & 0 \\ 0 & 1 & t & 0 \\ 1 & 0 & 0 & t \end{pmatrix} \text{ e } B_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -2+t \\ 0 & 1 & 2+t & 2 \\ -2 & -2+t & -1 & 0 \\ 2+t & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 12.16 (Esercizio 17, punti n) e m), p. 192, Sernesi). Si calcoli la forma canonica di Jordan delle seguenti matrici $A \in M_5(\mathbb{C})$ e $B \in M_6(\mathbb{C})$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 2i \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 12.17. Si dimostri che l'implicazione $(2c) \implies (2b)$ (e quindi $(2c) \implies (2a)$) dell'Esercizio 12.12 è falsa se non si richiede che tutti gli autovalori di A e tutti gli autovalori di B abbiano molteplicità algebrica ≤ 3 .

Esercizio 12.18. Si calcoli la forma canonica di Jordan delle seguenti matrici $A, B \in M_4(\mathbb{R})$ e si dica se sono simili:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

⁹ $-2A, B$ e $4C$ coincidono con le matrici considerate nei punti a), d) ed e) dell'Esercizio 10, p. 190 di Sernesi.

¹⁰ A coincide con la matrice considerata nel punto k) dell'Esercizio 17, p. 192 di Sernesi.

Esercizio 12.19. Per ogni $t \in \mathbb{R}$, si calcoli la forma canonica di Jordan della seguente matrice

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & t & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R}).$$

Esercizio 12.20. Sia \mathbb{K} un campo e sia $A \in M_n(\mathbb{K})$. Si dimostri che le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- (i) A è nilpotente, cioè esiste $k \in \mathbb{N}^*$ tale che $A^k = \mathbf{0}$.
- (ii) A possiede solamente l'autovalore nullo, cioè $P_A(T) = (-1)^n T^n$.
- (iii) $A^n = \mathbf{0}$.

SOLUZIONE:

L'implicazione (i) \implies (ii) è dimostrata nel Lemma 13.18, p. 178 di Sernesi. L'implicazione (ii) \implies (iii) segue subito dal teorema di Jordan e dal fatto, se $J \in M_n(\mathbb{K})$ è una matrice strettamente triangolare superiore, allora $J^n = \mathbf{0}$. Infine l'implicazione (iii) \implies (i) è evidente. ■

Esercizio 12.21 (Teorema di Hamilton-Cayley). Se $A \in M_n(\mathbb{C})$, allora $P_A(A)$ è la matrice nulla.

SOLUZIONE:

Sia $P_A(T) = (-1)^n (T - \lambda_1)^{m_1} (T - \lambda_2)^{m_2} \dots (T - \lambda_k)^{m_k}$ con $\lambda_i \neq \lambda_j$ se $i \neq j$, e sia J la forma canonica di Jordan di A :

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & J_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & J_k \end{pmatrix},$$

dove ciascuna matrice $J_h \in M_{m_h}(\mathbb{C})$ è una matrice in forma canonica di Jordan composta da blocchi di Jordan relativi al solo autovalore λ_h . Sia $M \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ tale che $A = M^{-1}JM$. Osserviamo che $P_A(A) = M^{-1}P_A(J)M$ ¹¹ e

$$P_A(J) = \begin{pmatrix} P_A(J_1) & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & P_A(J_2) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & P_A(J_k) \end{pmatrix}.$$

Segue che la matrice $P_A(A)$ è nulla se e soltanto se ogni matrice $P_A(J_h)$ lo è. Sia $h \in \{1, \dots, k\}$. Poiché $J_h - \lambda_h I_{m_h}$ è una matrice strettamente triangolare superiore di ordine m_h , si ha che $(J_h - \lambda_h I_{m_h})^{m_h} = \mathbf{0}$. Dunque vale:

$$P_A(J_h) = (-1)^n (J_h - \lambda_1 I_{m_h})^{m_1} \dots (J_h - \lambda_h I_{m_h})^{m_h} \dots (J_h - \lambda_k I_{m_h})^{m_k} = \mathbf{0},$$

come desiderato. ■

Diagonalizzazione tramite matrici unitarie e ortogonali: teorema spettrale. Sia $A \in M_n(\mathbb{C})$. Una matrice $B \in M_n(\mathbb{C})$ si dice *unitariamente simile ad A* (o *simile ad A tramite matrici unitarie*) se esiste $P \in \text{U}(n)$ tale che $B = P^{-1}AP = P^H A P$. A è detta *unitariamente diagonalizzabile* (o *diagonalizzabile tramite matrici unitarie*) se è unitariamente simile ad una matrice diagonale.

Si osservi che, se \mathbb{C}^n è dotato del prodotto hermitiano standard $\langle x, y \rangle_{\mathbb{C}^n} = x^T \bar{y}$, allora la matrice A è unitariamente diagonalizzabile se e soltanto se esiste una base ortonormale \mathcal{O} di \mathbb{C}^n diagonalizzante per l'operatore lineare $L_A : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ associato ad A . Se \mathcal{O} ha queste proprietà, \mathbf{c}_n è la base canonica di \mathbb{C}^n e $P := \mathcal{M}_{\mathbf{c}_n, \mathcal{O}}(\mathbf{1}_{\mathbb{C}^n})$, allora $P \in \text{U}(n)$ e $P^H A P$ è uguale a $\mathcal{M}_{\mathcal{O}}(L_A)$, che è una matrice diagonale in quanto la base \mathcal{O} di \mathbb{C}^n è diagonalizzante per L_A :

$$P^H A P = P^{-1} A P = (\mathcal{M}_{\mathbf{c}_n, \mathcal{O}}(\mathbf{1}_{\mathbb{C}^n}))^{-1} \mathcal{M}_{\mathbf{c}_n}(L_A) \mathcal{M}_{\mathbf{c}_n, \mathcal{O}}(\mathbf{1}_{\mathbb{C}^n}) = \mathcal{M}_{\mathcal{O}}(L_A).$$

Teorema spettrale (caso generale). Una matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ è unitariamente diagonalizzabile se e soltanto se A è normale, ovvero $A^H A = A A^H$.

¹¹Vedi la soluzione dell'Esercizio 12.8.

Teorema spettrale (caso hermitiano). Una matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ è unitariamente simile ad una matrice diagonale con elementi diagonali reali se e soltanto se A è hermitiana, ovvero $A^H = A$.¹²

Sia ora $C \in M_n(\mathbb{R})$. Una matrice $D \in M_n(\mathbb{C})$ si dice *ortogonalmente simile a C* (o *simile a C tramite matrici ortogonali*) se esiste $Q \in O(n)$ tale che $D = Q^{-1}CQ = Q^T C Q$. C è detta *ortogonalmente diagonalizzabile* (o *diagonalizzabile tramite matrici ortogonali*) se è ortogonalmente simile ad una matrice diagonale.

Anche in questo caso, se \mathbb{R}^n è dotato del prodotto scalare standard $\langle x, y \rangle_{\mathbb{R}^n} = x^T y$, allora la matrice C è ortogonalmente diagonalizzabile se e soltanto se esiste una base ortonormale di \mathbb{R}^n diagonalizzante per l'operatore lineare $L_C : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ associato a C . Se \mathcal{O} ha queste proprietà, \mathcal{C}_n è la base canonica di \mathbb{R}^n e $Q := \mathcal{M}_{\mathcal{C}_n, \mathcal{O}}(\mathbf{1}_{\mathbb{R}^n})$, allora $Q \in O(n)$ e $Q^T C Q$ è una matrice diagonale.

Teorema spettrale (caso reale). Una matrice in $M_n(\mathbb{R})$ è ortogonalmente diagonalizzabile se e soltanto se è simmetrica.¹³

Consideriamo il seguente esercizio:

ESERCIZIO TS. Sia $A \in M_n(\mathbb{C})$ una matrice assegnata esplicitamente. Si dica se A è unitariamente diagonalizzabile e, in caso affermativo, si calcoli una matrice $P \in \text{SU}(n)$ tale che $P^H A P$ è diagonale.

Ecco una procedura per risolvere l'esercizio:

- (1) Si verifica se A è normale, calcolando e comparando $A^H A$ e $A A^H$. Se A non è normale, allora A non è unitariamente diagonalizzabile. Altrimenti A è unitariamente diagonalizzabile e si va avanti.
- (2) Si calcola $\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ risolvendo l'equazione polinomiale $P_A(\lambda) = 0$.
- (3) Per ogni $h \in \{1, \dots, k\}$, si calcola una base \mathcal{B}_h dell'autospazio $\mathbb{V}_{\lambda_h}(A)$ di A relativo a λ_h .¹⁴
- (4) Per ogni $h \in \{1, \dots, k\}$, si calcola una base ortonormale \mathcal{O}_h dell'autospazio $\mathbb{V}_{\lambda_h}(A)$ applicando l'algoritmo di Gram-Schmidt a \mathcal{B}_h .¹⁵
- (5) Si definisce la base $\mathcal{O} := (\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_k)$ di \mathbb{C}^n . Tale base è ortonormale e diagonalizzante per A (via similitudine). Segue che la matrice R di cambiamento di coordinate di \mathbb{C}^n dalla base \mathcal{O} alla base \mathcal{C}_n , cioè la matrice avente i vettori di \mathcal{O} come colonne, è unitaria e $R^H A R$ è una matrice diagonale D .
- (6) Si calcola $\det(R)$. Poiché R è unitaria, $\det(R)$ è un numero complesso u di norma 1 (infatti $I_n = R^H R$ e quindi per Binet vale: $1 = \det(\overline{R}^T) \det(R) = \overline{\det(R)} \det(R) = |\det(R)|^2$). Se $u = 1$, allora $R \in \text{SU}(n)$ e quindi basta porre $P := R$. Se $u \neq 1$, allora è sufficiente definire P come la matrice ottenuta moltiplicando per $u^{-1} = \bar{u}$ una colonna di R scelta arbitrariamente (per esempio la prima). In tal modo $\det(P) = u^{-1} \det(R) = u^{-1} u = 1$, ovvero $P \in \text{SU}(n)$. Poiché le colonne di P sono ancora autovettori di A , si ha che $P^H A P$ è diagonale; anzi è uguale a D .

Enunciamo due varianti del precedente esercizio:

ESERCIZIO TS'. Sia $A \in M_n(\mathbb{C})$ una matrice assegnata esplicitamente. Si dica se A è unitariamente simile ad una matrice diagonale con elementi diagonali reali e, in caso affermativo, si calcoli una matrice $P \in \text{SU}(n)$ tale che $P^H A P$ è diagonale.

ESERCIZIO TS''. Sia $C \in M_n(\mathbb{R})$ una matrice assegnata esplicitamente. Si dica se C è ortogonalmente diagonalizzabile e, in caso affermativo, si calcoli una matrice $Q \in \text{SO}(n)$ tale che $Q^T C Q$ è diagonale.

Questi esercizi si risolvono in modo simile al precedente, usando il Teorema spettrale nei casi hermitiano e reale.

¹²In particolare, si ha che le matrici hermitiane hanno autovalori reali.

¹³In particolare, si ha che le matrici simmetriche reali (essendo hermitiane, se viste come matrici complesse) hanno tutti gli autovalori in \mathbb{R} .

¹⁴Si ricorda che, essendo A normale, non solo i suoi autospazi stanno in somma diretta e $\mathbb{V}_{\lambda_1}(A) \oplus \dots \oplus \mathbb{V}_{\lambda_k}(A) = \mathbb{C}^n$, ma tali autospazi sono anche a due a due ortogonali.

¹⁵Dunque, se $\mathcal{B}_h = (v_1, \dots, v_\ell)$, allora si applica Gram-Schmidt come segue:

- $w_1 := v_1$, $w_{k+1} := v_{k+1} - \frac{\langle v_{k+1}, w_1 \rangle_{\mathbb{C}^n}}{\langle w_1, w_1 \rangle_{\mathbb{C}^n}} w_1 - \dots - \frac{\langle v_{k+1}, w_k \rangle_{\mathbb{C}^n}}{\langle w_k, w_k \rangle_{\mathbb{C}^n}} w_k$ con $k \in \{1, \dots, \ell - 1\}$;
- $\mathcal{O}_h := (\hat{w}_1, \dots, \hat{w}_\ell)$, dove $\hat{w}_j := w_j / \|w_j\|_{\mathbb{C}^n}$ e $\|w_j\|_{\mathbb{C}^n} := \sqrt{\langle w_j, w_j \rangle_{\mathbb{C}^n}}$.

Esercizio 12.22. Siano $A, B \in M_2(\mathbb{C})$ le seguenti matrici complesse:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & i \\ -i & 3 \end{pmatrix} \quad e \quad B = \begin{pmatrix} 1-i & 1-i \\ -1+i & 1-i \end{pmatrix}.$$

Si dica se ciascuna matrice è unitariamente diagonalizzabile (o meglio unitariamente simile ad una matrice diagonale con elementi diagonali reali) e, in caso affermativo, si calcoli una base ortonormale di \mathbb{C}^2 diagonalizzante per l'operatore associato alla matrice stessa.

Esercizio 12.23. Siano $A \in M_3(\mathbb{C})$ la seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2i & 2 \\ 2i & 5 & -i \\ 2 & i & 5 \end{pmatrix}.$$

Si dica se A è unitariamente diagonalizzabile e, in caso affermativo, si calcoli una matrice $P \in \text{SU}(3)$ tale che $P^H A P$ è diagonale.

Esercizio 12.24. Siano $A \in M_3(\mathbb{R})$ e $B \in M_3(\mathbb{C})$ le seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \quad e \quad B = iA = \begin{pmatrix} 2i & 2i & 2i \\ 2i & 5i & -i \\ 2i & -i & 5i \end{pmatrix}.$$

Si dica se A è ortogonalmente diagonalizzabile e, in caso affermativo, si calcoli una matrice $Q \in \text{SO}(3)$ tale che $Q^T A Q$ è diagonale. Si dica inoltre se B è unitariamente diagonalizzabile e, in caso affermativo, si calcoli una matrice $P \in \text{SU}(3)$ tale che $P^H B P$ è diagonale.

Esercizio 12.25. Siano $A, B, C, D \in M_3(\mathbb{C})$ le seguenti matrici complesse:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & i & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{4}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ -i & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 4i & 2 & 2 \\ -2 & 4i & -2i \\ -2 & -2i & 4i \end{pmatrix}.$$

Si dica se ciascuna matrice è unitariamente diagonalizzabile (o meglio unitariamente simile ad una matrice diagonale con elementi diagonali reali) e, in caso affermativo, si calcoli una base ortonormale di \mathbb{C}^3 diagonalizzante per l'operatore associato alla matrice stessa.

Esercizio 12.26. Per ogni $z \in \mathbb{C}$, sia $A_z \in M_3(\mathbb{C})$ la seguente matrice:

$$A_z = \begin{pmatrix} 2 & -2z & 2 \\ 2i & -5z^2 & z^3 \\ 2 & -z^3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Si dica per quali valori di $z \in \mathbb{C}$ la matrice A_z è unitariamente simile ad una matrice diagonale con elementi diagonali reali e, per tali valori, si calcoli una matrice unitaria speciale $P \in \text{SU}(3)$ tale che $P^H A P$ è diagonale.

Esercizio 12.27. Per ogni $t \in \mathbb{C}$, sia $A_t \in M_2(\mathbb{C})$ la seguente matrice:

$$A_t = \begin{pmatrix} 1-i & 1-i \\ -1+i & t-i \end{pmatrix}.$$

Si dica per quali valori di $t \in \mathbb{C}$ la matrice A_t è unitariamente diagonalizzabile. Inoltre, per tali valori di $t \in \mathbb{C}$, si calcoli una base ortonormale di \mathbb{C}^2 diagonalizzante per l'operatore lineare $L_{A_t} : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ associato ad A_t e una matrice $P \in \text{SU}(2)$ tale che $P^H A_t P$ è diagonale.

Diagonalizzazione di forme quadratiche e matrici simmetriche congruenti. Sia \mathbb{K} un sottocampo di \mathbb{C} (ad esempio $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ o \mathbb{C}), sia V uno spazio vettoriale su \mathbb{K} di dimensione finita n , sia $b : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ una forma bilineare simmetrica e sia $q : V \rightarrow \mathbb{K}$ la forma quadratica associata a b (cioè $q(v) := b(v, v)$). Una base $\mathcal{C} = (v_1, \dots, v_n)$ di \mathbb{K}^n si dice *diagonalizzante per b* (o *diagonalizzante per q*) se la matrice $M_{\mathcal{C}}(b) = (b(v_i, v_j))_{i,j}$ associata a b rispetto a \mathcal{C} è una matrice diagonale o, equivalentemente, se esistono

$a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ tali che $q(v) = a_1x_1^2 + \dots + a_nx_n^2$ per ogni $v \in V$, dove $[v]_{\mathcal{C}} = (x_1, \dots, x_n)^T$. Se esiste una base diagonalizzante per b (risp. per q), allora si dice che b (risp. q) è *diagonalizzabile*.

Data una qualsiasi base \mathcal{B} di \mathbb{K}^n , vale la seguente uguaglianza:

$$\mathbb{M}_{\mathcal{B}}(b) = (\mathcal{M}_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}(\mathbf{1}_{\mathbb{K}^n}))^T \mathbb{M}_{\mathcal{C}}(b) \mathcal{M}_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}(\mathbf{1}_{\mathbb{K}^n}).$$

Segue che b (risp. q) è diagonalizzabile se e soltanto se $\mathbb{M}_{\mathcal{B}}(b)$ è congruente ad una matrice diagonale. Ricordiamo che, date due matrici $A, B \in M_n(\mathbb{K})$, B si dice *congruente ad A* se esiste $M \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ tale che $B = M^T A M$. La relazione di congruenza è una relazione di equivalenza su $M_n(\mathbb{K})$.

Teorema (diagonalizzazione di f.b.s e f.q.). *Ogni forma bilineare simmetrica su V (risp. ogni forma quadratica su V) è diagonalizzabile.*

Nel CASO COMPLESSO possiamo essere più precisi:

Teorema (diagonalizzazione di f.b.s e f.q.: caso complesso). *Se \mathbb{K} è algebricamente chiuso (ad esempio $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) e $b : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ è una forma bilineare simmetrica su V , allora esiste una base \mathcal{C} di V diagonalizzante per b tale che*

$$\mathbb{M}_{\mathcal{C}}(b) = \left(\begin{array}{c|c} I_r & \mathbf{0}_1 \\ \hline \mathbf{0}_1^T & \mathbf{0}_2 \end{array} \right),$$

dove $r := \text{rk}(b)$, $\mathbf{0}_1$ è la matrice nulla in $M_{r, n-r}(\mathbb{K})$ e $\mathbf{0}_2$ è la matrice nulla in $M_{n-r}(\mathbb{K})$. In coordinate rispetto alla base \mathcal{C} di V , la forma quadratica $q : V \rightarrow \mathbb{K}$ indotta da b assume la seguente espressione, detta forma canonica di q :

$$q(v) = z_1^2 + \dots + z_r^2$$

per ogni $v \in V$, dove $(z_1, \dots, z_r, z_{r+1}, \dots, z_n)^T = [v]_{\mathcal{C}}$.

Equivalentemente, ogni matrice simmetrica in $M_n(\mathbb{K})$ (ad esempio complessa) di rango r è congruente alla seguente matrice

$$\left(\begin{array}{c|c} I_r & \mathbf{0}_1 \\ \hline \mathbf{0}_1^T & \mathbf{0}_2 \end{array} \right).$$

In particolare, due matrici simmetriche in $M_n(\mathbb{K})$ (ad esempio complesse) sono congruenti se e soltanto se hanno lo stesso rango.

Vediamo ora il CASO REALE.

Teorema (Sylvester). *Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione n , sia $b : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineare simmetrica su V di rango r e sia $q : V \rightarrow \mathbb{R}$ la forma quadratica associata a b . Allora esistono una base \mathcal{C} di V e due interi non-negativi p e s , dipendenti solo da b (e non da \mathcal{C}), tali che $p + s = r$ e*

$$\mathbb{M}_{\mathcal{C}}(b) = \left(\begin{array}{c|c|c} I_p & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & -I_s & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right).^{16}$$

In coordinate rispetto alla base \mathcal{C} di V , la forma quadratica $q : V \rightarrow \mathbb{R}$ assume la seguente espressione, detta forma canonica di q :

$$q(v) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_r^2$$

per ogni $v \in V$, dove $(x_1, \dots, x_p, x_{p+1}, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots, x_n)^T = [v]_{\mathcal{C}}$. L'intero p si dice indice di positività di b (o di q), l'intero s si dice indice di negatività di b (o di q) e la coppia (p, s) è detta *segnatura* di b (o di q).

Equivalentemente, ogni matrice simmetrica reale in $M_n(\mathbb{R})$ è congruente ad un'unica matrice della seguente forma

$$\left(\begin{array}{c|c|c} I_p & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & -I_s & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right).$$

In particolare, due matrici simmetriche reali in $M_n(\mathbb{R})$ sono congruenti se e soltanto se le corrispondenti forme quadratiche hanno la stessa segnatura.

Il seguente risultato segue subito dal teorema spettrale (caso reale).

¹⁶Se $p = 0$ (e/o $s = 0$), allora il blocco " I_p " (e/o " $-I_s$ ") è omissso.

Proposizione (calcolo della segnatura). Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione finita n , sia $q : V \rightarrow \mathbb{R}$ una forma quadratica su V , sia $b : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ la forma bilineare simmetrica polare di q (cioè b induce q ponendo $q(v) = b(v, v)$) e sia A la matrice associata a b rispetto a qualche fissata base di V . Allora l'indice di positività (risp. di negatività) di q è uguale al numero di radici positive (risp. negative) del polinomio caratteristico P_A di A contate con molteplicità.

Un caso particolarmente interessante è quello in cui $V = \mathbb{R}^n$. Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$ una matrice simmetrica e sia $q_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ la forma quadratica associata ad A : $q_A(x) = x^T A x$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$. Indichiamo con \mathcal{C}_n la base canonica di \mathbb{R}^n e con $\beta_A : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ la forma bilineare simmetrica polare di q_A , che corrisponde alla forma bilineare simmetrica su \mathbb{R}^n associata ad A : $\beta_A(x, y) = x^T A y$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$. Poiché $\mathbb{M}_{\mathcal{C}_n}(\beta_A) = A$, in questa situazione, la precedente proposizione assume la seguente forma:

Corollario. Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$ una matrice simmetrica e sia $q_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ la forma quadratica associata ad A . Allora l'indice di positività (risp. di negatività) di q_A è uguale al numero di radici positive (risp. negative) di P_A contate con molteplicità.

Per calcolare il numero di radici nulle, positive e negative di P_A contate con molteplicità si può (non si deve!!!) utilizzare il seguente risultato.

Teorema (Criterio di Cartesio). Sia $P(T) = a_n T^n + a_{n-1} T^{n-1} + \dots + a_d T^d$ un polinomio a coefficienti reali tali che $a_n \neq 0$ e $a_d \neq 0$. Supponiamo che P abbia tutte le radici reali¹⁷. Allora si ha:

- (i) d è uguale al numero di radici nulle di P contate con molteplicità;
- (ii) il numero di radici positive di P contate con molteplicità è uguale al numero p di variazioni di segno nella successione dei segni dei coefficienti non nulli di P : $\text{segno}(a_n) \cdot \dots \cdot \text{segno}(a_d)$;
- (iii) il numero di radici negative di P contate con molteplicità è uguale a $n - d - p$.¹⁸

Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$ una matrice simmetrica, sia $\beta_A : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ la forma bilineare associata ad A ($\beta_A(x, y) = x^T A y$) e sia $q_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ la corrispondente forma quadratica ($q_A(x) = x^T A x$). Una procedura per calcolare una base diagonalizzante per q_A è la seguente.

- (1) Si applica il teorema spettrale (caso reale) alla matrice A ottenendo una matrice $M \in O(n)$ tale che $M^{-1} A M$ è uguale ad una matrice diagonale D . Siano v_1, \dots, v_n le colonne di M e sia $\mathcal{C} = (v_1, \dots, v_n)$ la corrispondente base di \mathbb{R}^n . Poiché $M^{-1} = M^T$, si ha che \mathcal{C} è anche diagonalizzante per q_A (o equivalentemente per β_A) e vale:

$$\mathbb{M}_{\mathcal{C}}(\beta_A) = (\mathcal{M}_{\mathcal{C}_n, \mathcal{C}}(\mathbf{1}_{\mathbb{R}^n}))^T \mathbb{M}_{\mathcal{C}_n}(\beta_A) \mathcal{M}_{\mathcal{C}_n, \mathcal{C}}(\mathbf{1}_{\mathbb{R}^n}) = M^T A M = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix},$$

dove $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sono gli autovalori (eventualmente ripetuti) di A . Dunque:

$$q(v) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \dots + \lambda_n x_n^2$$

per ogni $v \in \mathbb{R}^n$, dove $(x_1, \dots, x_n)^T = [v]_{\mathcal{C}}$.

- (2) Se si desidera portare q_A in forma canonica bisogna procedere come segue. Sia $r := \text{rk}(A)$. A meno di riordinare gli elementi di \mathcal{C} , possiamo supporre che $\lambda_1 > 0, \dots, \lambda_p > 0, \lambda_{p+1} < 0, \dots, \lambda_r < 0$ per qualche p e $\lambda_{r+1} = \dots = \lambda_n = 0$. Definiamo la base $\mathcal{C}' = (v'_1, \dots, v'_n)$ di \mathbb{R}^n ponendo:

$$\begin{cases} v'_j := \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} v_j & \text{se } j \in \{1, \dots, p\}; \\ v'_j := \frac{1}{\sqrt{-\lambda_j}} v_j & \text{se } j \in \{p+1, \dots, r\}; \\ v'_j := v_j & \text{se } j \in \{r+1, \dots, n\}. \end{cases}$$

Osserviamo che $\beta_A(v'_i, v'_j) = 0$ se $i \neq j$ e

$$\begin{cases} \beta_A(v'_j, v'_j) = \frac{1}{\lambda_j} \beta_A(v_j, v_j) = 1 & \text{se } j \in \{1, \dots, p\}; \\ \beta_A(v'_j, v'_j) = \frac{1}{-\lambda_j} \beta_A(v_j, v_j) = -1 & \text{se } j \in \{p+1, \dots, r\}; \\ \beta_A(v'_j, v'_j) = \beta_A(v_j, v_j) = 0 & \text{se } j \in \{r+1, \dots, n\}. \end{cases}$$

¹⁷Questa condizione è sempre verificata se P è il polinomio caratteristico di una matrice simmetrica reale.

¹⁸ATTENZIONE. In generale, il numero di radici negative di P contate con molteplicità NON è uguale al numero di "permanenze" di segno nella successione dei segni dei coefficienti non nulli di P . Ad esempio, se $P(T) = T^2 - 1$, allora la successione dei segni dei coefficienti non nulli di P è "+ -", il numero di "permanenze" di segno è 0, mentre P possiede una radice negativa: $T = -1$.

Segue che \mathcal{C}' è la base cercata: \mathcal{C}' è diagonalizzante per β_A e vale:

$$\mathbb{M}_{\mathcal{C}'}(\beta_A) = \left(\begin{array}{c|c|c} I_p & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & -I_s & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right).$$

Dunque, rispetto alla base \mathcal{C}' di \mathbb{R}^n , q_A è in forma canonica:

$$q(v) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_r^2$$

per ogni $v \in \mathbb{R}^n$, dove $(x_1, \dots, x_n)^T = [v]_{\mathcal{C}'}$.

Si osservi infine che, se $M' \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ è la matrice avente v'_1, \dots, v'_n come colonne, allora vale:

$$(M')^T A M' = (\mathcal{M}_{\mathcal{C}_n, \mathcal{C}'}(\mathbf{1}_{\mathbb{R}^n}))^T \mathbb{M}_{\mathcal{C}_n}(\beta_A) \mathcal{M}_{\mathcal{C}_n, \mathcal{C}'}(\mathbf{1}_{\mathbb{R}^n}) = \mathbb{M}_{\mathcal{C}'}(\beta_A) = \left(\begin{array}{c|c|c} I_p & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & -I_s & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right).$$

Un altro metodo per calcolare una base diagonalizzante per q_A , più semplice e valido su ogni sottocampo \mathbb{K} di \mathbb{C} , è la **tecnica di completamento dei quadrati di Lagrange**. La vedremo nei seguenti tre esercizi svolti.

Esercizio 12.28. Sia $q: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ la seguente forma quadratica:

$$q(x_1, x_2, x_3) := x_2^2 - 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

Si risponda ai seguenti quesiti:

- (i) Si calcoli $\text{rk}(q)$ e si scriva l'espressione polinomiale della forma bilineare simmetrica polare di q .
- (ii) Si calcoli la segnatura di q e una base di \mathbb{R}^3 diagonalizzante per q .
- (iii) Si calcoli una forma quadratica $Q: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ in forma canonica (cioè $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_r^2$ per qualche $0 \leq p \leq r \leq 3$) e un automorfismo lineare $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ di \mathbb{R}^3 tale che $q = Q \circ \varphi$, cioè tale che il seguente diagramma commuta:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{q} & \mathbb{R} \\ \varphi \downarrow & \nearrow Q & \\ \mathbb{R}^3 & & \end{array} .$$

SOLUZIONE:

(i) Osserviamo anzitutto che q è la forma quadratica su \mathbb{R}^3 associata alla seguente matrice simmetrica $A \in M_3(\mathbb{R})$:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Poiché il minore principale di testa di A di ordine 2 è $-1 \neq 0$ e $\det(A) = 0$, segue che $\text{rk}(q) = \text{rk}(A) = 2$. Dunque q è una forma quadratica degenere. La forma bilineare simmetrica polare β_A di q ha la seguente espressione:

$$\beta_A(x, y) = x^T A y = x_1 y_2 + 3x_1 y_3 + x_2 y_1 + x_2 y_2 + x_2 y_3 + 3x_3 y_1 + x_3 y_2 - 3x_3 y_3,$$

dove $x = (x_1, x_2, x_3)^T, y = (y_1, y_2, y_3)^T \in \mathbb{R}^3$.

(ii) Si ha: $P_A(T) = -T^3 - 2T^2 + 14T$. La successione dei segni dei coefficienti non nulli di P_A è uguale a “- - +”. Tale successione contiene una sola variazione di segno. Dal criterio di Cartesio segue che P_A possiede: una sola radice nulla, una sola radice positiva e $3 - 1 - 1 = 1$ radice negativa. La segnatura di q è $(1, 1)$ e quindi A è congruente alla seguente matrice:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo ora una base di \mathbb{R}^3 diagonalizzante per q utilizzando la TECNICA DI COMPLETAMENTO DEI QUADRATI DI LAGRANGE. Completiamo i quadrati di q prima rispetto a x_2 e poi rispetto a x_1 :

$$\begin{aligned} q(x_1, x_2, x_3) &= x_2^2 - 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3 = \\ &= (\underline{x_2} + x_1 + x_3)^2 - x_1^2 - x_3^2 - 2x_1x_3 - 3x_3^2 + 6x_1x_3 = \\ &= (\underline{x_2} + x_1 + x_3)^2 - x_1^2 - 4x_3^2 + 4x_1x_3 = (\underline{x_2} + x_1 + x_3)^2 - (\underline{x_1} - 2x_3)^2 + 4x_3^2 - 4x_3^2 = \\ &= (\underline{x_2} + x_1 + x_3)^2 - (\underline{x_1} - 2x_3)^2. \end{aligned}$$

Eseguiamo il seguente cambiamento “formale” di variabili:

$$\begin{cases} y_1 = \underline{x_2} + x_1 + x_3 = x_1 + x_2 + x_3 \\ y_2 = \underline{x_1} - 2x_3 \\ y_3 = \underline{x_3} \end{cases}$$

o, equivalentemente,

$$y = Mx \quad \text{con} \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \text{GL}_3(\mathbb{R}).$$

Vale:

$$x^T Ax = q(x) = y_1^2 - y_2^2 = y^T Dy = (Mx)^T D(Mx) = x^T M^T DMx$$

per ogni $x \in \mathbb{R}^3$. In altre parole, si ha che $A = M^T DM$ (vedi nota ¹⁹) o, equivalentemente, $(M^{-1})^T A(M^{-1}) = D$. Segue che le colonne di M^{-1} formano una base diagonalizzante per q . Poiché si ha

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \text{GL}_3(\mathbb{R}),$$

i vettori $v_1 := (0, 1, 0)^T$, $v_2 := (1, -1, 0)^T$ e $v_3 = (2, -3, 1)$ formano una base diagonalizzante per q . Si osservi infatti che $\beta_A(v_i, v_j) = 0$ se $i \neq j$, $\beta_A(v_1, v_1) = 1$, $\beta_A(v_2, v_2) = -1$ e $\beta_A(v_3, v_3) = 0$.

(iii) Basta porre $Q(y) := y_1^2 - y_2^2 = y^T Dy$ per ogni $y \in \mathbb{R}^3$ e $\varphi(x) := Mx$ per ogni $x \in \mathbb{R}^3$, dove M è la matrice definita sopra. Infatti come abbiamo visto al punto (ii), vale:

$$(Q \circ \varphi)(x) = Q(\varphi(x)) = Q(Mx) = (Mx)^T D(Mx) = x^T M^T DMx = x^T Ax = q(x)$$

per ogni $x \in \mathbb{R}^3$. ■

Esercizio 12.29 (Esercizio precedente su \mathbb{C}). Sia $q : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ la seguente forma quadratica complessa:

$$q(x_1, x_2, x_3) := x_2^2 - 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

Si risponda ai seguenti quesiti:

- (i) Si calcoli $\text{rk}(q)$ e si scriva l'espressione polinomiale della forma bilineare simmetrica polare di q .
- (ii) Si calcoli una base di \mathbb{C}^3 diagonalizzante per q .
- (iii) Si calcoli una forma quadratica $Q : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ in forma canonica (cioè $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + \dots + x_r^2$ per qualche $0 \leq r \leq 3$) e un automorfismo lineare $\varphi : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ di \mathbb{C}^3 tale che $q = Q \circ \varphi$, cioè tale che il seguente diagramma commuta:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^3 & \xrightarrow{q} & \mathbb{C} \\ \varphi \downarrow & \nearrow Q & \\ \mathbb{C}^3 & & \end{array} .$$

SOLUZIONE:

La risposta al primo quesito è identica al caso reale. Inoltre i vettori v_1, v_2 e v_3 definiti al punto (ii), visti come vettori di \mathbb{C}^3 , formano una base \mathcal{C} di \mathbb{C}^3 diagonalizzante per q . Tuttavia q non è in “forma canonica complessa” rispetto a tale base:

$$q(v) = y_1^2 - y_2^2$$

¹⁹Si ricordi che, se A e B sono due matrici simmetriche in $M_n(\mathbb{K})$ (dove \mathbb{K} è un sottocampo di \mathbb{C}) tali che $x^T Ax = x^T Bx$ per ogni $x \in \mathbb{K}^n$, allora $A = B$. Infatti, utilizzando la formula di polarizzazione, si ottiene: $x^T Ay = \frac{1}{2}((x+y)^T A(x+y) - x^T Ax - y^T Ay) = \frac{1}{2}((x+y)^T B(x+y) - x^T Bx - y^T By) = x^T By$ per ogni $x, y \in \mathbb{K}^n$. Ora sostituendo a x e y i vettori della base canonica di \mathbb{K}^n deduciamo che A e B hanno gli stessi elementi, cioè sono uguali.

per ogni $v \in \mathbb{C}^3$, dove $(y_1, y_2, y_3)^T = [v]_{\mathcal{C}}$. Se si desidera una base che rilegga q in forma canonica dobbiamo aggiungere un passaggio alla tecnica di completamento dei quadrati. Infatti abbiamo visto sopra che: $q(x_1, x_2, x_3) = (\underline{x_2} + x_1 + x_3)^2 - (\underline{x_1} - 2x_3)^2$. Basta portare “-1” dentro il secondo quadrato:

$$q(x_1, x_2, x_3) = (\underline{x_2} + x_1 + x_3)^2 + (\underline{i x_1} - 2i x_3)^2.$$

Possiamo ora ripetere i ragionamenti fatti nel precedente esercizio. Definiamo la matrice

$$M' := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ i & 0 & -2i \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \text{GL}_3(\mathbb{C}).$$

Allora le colonne della matrice $(M')^{-1}$ formano una base \mathcal{C}' di \mathbb{C}^3 diagonalizzante per q , che rilegge q stessa in “forma canonica complessa”:

$$q(v) = z_1^2 + z_2^2$$

per ogni $v \in \mathbb{C}^3$, dove $z = (z_1, z_2, z_3)^T = [v]_{\mathcal{C}'}$. Infine, posto $Q(y) = z_1^2 + z_2^2$ per ogni $z \in \mathbb{C}^3$ e $\varphi(x) := M'x$, si ha che $q = Q \circ \varphi$. ■

Esercizio 12.30. Si calcoli una base di \mathbb{R}^3 diagonalizzante per la seguente forma quadratica $q: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$:

$$q(x_1, x_2, x_3) := x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3.$$

Si calcoli inoltre la segnatura di q .

SOLUZIONE:

Procediamo con la tecnica di completamento dei quadrati. Non essendo presenti monomi del tipo ax_j^2 possiamo procedere col segue cambiamento “formale” di variabili:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = x_3 \end{cases}.$$

Poiché $x_1 = y_1 - y_2$, $x_2 = y_2$ e $x_3 = y_3$, si ottiene:

$$q(x_1, x_2, x_3) = (y_1 - y_2)y_2 + (y_1 - y_2)y_3 + y_2 y_3 = y_1 y_2 - y_2^2 + y_1 y_3.$$

Completiamo i quadrati rispetto a y_2 e y_1 :

$$\begin{aligned} q(x_1, x_2, x_3) &= \mathbf{y_1 y_2} - \mathbf{y_2^2} + y_1 y_3 = - \left(\underline{y_2} - \frac{\mathbf{y_1}}{2} \right)^2 + \frac{\mathbf{y_1^2}}{4} + y_1 y_3 = \\ &= - \left(\underline{y_2} - \frac{\mathbf{y_1}}{2} \right)^2 + \frac{\mathbf{y_1^2}}{4} + \mathbf{y_1 y_3} = \\ &= - \left(\underline{y_2} - \frac{\mathbf{y_1}}{2} \right)^2 + \left(\frac{\mathbf{y_1}}{2} + \mathbf{y_3} \right)^2 - \mathbf{y_3^2}. \end{aligned}$$

Poniamo

$$\begin{cases} z_1 = \frac{y_1}{2} + y_3 = \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2} + x_3 \\ z_2 = y_2 - \frac{y_1}{2} = -\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2} \\ z_3 = y_3 = x_3 \end{cases}$$

ovvero $z = Mx$ se $z = (z_1, z_2, z_3)^T$, $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ e

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \text{GL}_3(\mathbb{R}).$$

Osserviamo che

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le colonne $v_1 = (1, 1, 0)^T$, $v_2 = (-1, 1, 0)^T$ e $v_3 = (-1, -1, 1)^T$ di M^{-1} formano una base \mathcal{C} di \mathbb{R}^3 diagonalizzante per q (vedi la soluzione dell'Esercizio 12.27), che rilegge q stesso in forma canonica:

$$q(v) = z_1^2 - z_2^2 - z_3^2$$

per ogni $v \in \mathbb{C}^3$, dove $(z_1, z_2, z_3)^T = [v]_{\mathcal{C}}$. La segnatura di q è dunque $(1, 2)$. ■

Esercizio 12.31. Per ogni $k \in \mathbb{R}$, definiamo la forma quadratica $q_k : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ponendo

$$q_k(x_1, x_2) := kx_1^2 + x_2^2 - 2kx_1x_2.$$

Si scriva la forma canonica di q_k al variare di $k \in \mathbb{R}$ e sia dica per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la forma quadratica q_k è un prodotto scalare su \mathbb{R}^2 .²⁰

Esercizio 12.32. Siano A e B le seguenti matrici simmetriche reali in $M_3(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \quad e \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si risponda ai seguenti quesiti:

- (i) Si calcoli la segnatura della forma quadratica associata ad A e si determini una matrice $M_1 \in \text{GL}_3(\mathbb{R})$ tale che $M_1^T A M_1$ sia diagonale.
- (ii) Si calcoli la segnatura della forma quadratica associata ad B e si determini una matrice $M_2 \in \text{GL}_3(\mathbb{R})$ tale che $M_2^T B M_2$ sia diagonale.
- (iii) Si dimostri che A e B sono congruenti determinando una matrice $M_3 \in \text{GL}_3(\mathbb{R})$ tale che $B = M_3^T A M_3$.

Esercizio 12.33. Per ogni $t \in \mathbb{R}$, si calcoli la segnatura delle forme quadratiche $q_t : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ e $Q_t : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definite ponendo:

$$q_t(x_1, x_2, x_3) := tx_1^2 + 2x_1x_2 - 2tx_2x_3 - x_3^2$$

e

$$Q_t(x_1, x_2, x_3) := tx_2^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_3^2.$$

Si calcolino inoltre una base di \mathbb{R}^3 diagonalizzante per q_1 e una base di \mathbb{R}^4 diagonalizzante per Q_1 .

Esercizio 12.34. Sia dica se le seguenti matrici $A, B \in M_5(\mathbb{R})$ sono congruenti:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Somma e intersezione di sottospazi vettoriali, proiezioni ortogonali. Sia V uno spazio vettoriale su un campo \mathbb{K} di dimensione finita n e siano U e W due sottospazi vettoriali di V . Supponiamo siano noti:

- una base (u_1, \dots, u_t) di U e un sistema di equazioni cartesiane $AX = 0$ per U (cioè $A \in M_{r,n}(\mathbb{K})$ per qualche r , $X = (x_1, \dots, x_n)^T$ e $U = \text{Sol}(AX = 0)$);
- una base (w_1, \dots, w_s) di W e un sistema di equazioni cartesiane $BX = 0$ per W .

Consideriamo il seguente esercizio:

ESERCIZIO. Calcolare una base e un sistema di equazioni cartesiane per i sottospazi vettoriali $U + W$ e $U \cap W$ di V .

SOLUZIONE:

La somma $U + W$ è generata dai vettori $u_1, \dots, u_t, w_1, \dots, w_s$. Si può dunque estrarre una base di $U + W$ da $(u_1, \dots, u_t, w_1, \dots, w_s)$ applicando il principio dei minori orlati (vedi Esercizio 9.17 del “Foglio 9 di esercizi”). Utilizzando ancora il principio dei minori orlati assieme alla base di $U + W$ appena calcolata, si può scrivere un sistema di equazioni cartesiane per $U + W$ (vedi la parte finale del “Foglio 9 di esercizi”).

Un sistema di equazioni cartesiane per $U \cap W$ è facile da scrivere: basta mettere a sistema sia le equazioni cartesiane di U che quelle di W . In simboli si ha:

$$U \cap W = \text{Sol} \left(\begin{cases} AX = 0 \\ BX = 0 \end{cases} \right).$$

Una base di $U \cap W$ si può ora ottenere risolvendo il suddetto sistema. ■

²⁰Un prodotto scalare è una forma quadratica definita positiva.

Esercizio 12.35. Siano U e W due sottospazi vettoriali di \mathbb{R}^4 tali che

$$U = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle \text{ con } u_1 = (1, 0, -1, 1)^T, u_2 = (1, 0, 3, 2)^T \text{ e } u_3 = (1, 0, -13, -2)^T,$$

e

$$W = \langle w_1, w_2, w_3, w_4 \rangle \text{ con } w_1 = (2, 0, 2, 3)^T, w_2 = (0, 1, 0, 0)^T, w_3 = (1, 0, 0, 1)^T \text{ e } w_4 = (1, -1, 2, 2)^T,$$

Si risponda ai seguenti quesiti:

- (i) Si calcolino: una base di U , una base di W , equazioni cartesiane per U ed equazioni cartesiane per W .
- (ii) Si calcolino: equazioni cartesiane di $U \cap W$, una base di $U \cap W$ e una base di $U + W$.
- (iii) Equipaggiamo \mathbb{R}^4 con il prodotto scalare standard $\langle x, y \rangle_{\mathbb{R}^4} = x^T y$. Sia $P = (2, 2, 2, 3)^T$. Si calcolino: la proiezione ortogonale di P su U , la distanza tra P e U ²¹, la proiezione ortogonale di P su W e la distanza tra P e W . Si calcolino infine: equazioni cartesiane per U^\perp , una base per U^\perp , equazioni cartesiane per W^\perp e una base per W^\perp .

²¹Se P_U è la proiezione ortogonale di P su U , allora la distanza tra P e U è uguale a $\|P - P_U\|_{\mathbb{R}^4}$.