CORSI DI LAUREA IN MATEMATICA E FISICA

FOGLIO DI ESERCIZI # 11– GEOMETRIA 1

Esercizio 11.1 (Esercizio 9.2)**.** *Sia* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *l'applicazione lineare definita da*

$$T(x, y, z) = (x,\ y + 3z,\ x + y - z)$$

a) *Verificare che i vettori* $v_1 = (0, 3, 1)$, $v_2 = (0, -1, 1)$ *e* $v_3 = (-1, 1, 0)$ *sono autovettori di* T *e determinare i rispettivi autovalori.*
b) *Verificare che l'insieme* $\mathcal{B} = \{v_1,\ v_2,\ v_3\}$ *è una base di* $\mathbb{R}^3$.
c) *Determinare la matrice (diagonale)* D *associata a* T *rispetto alla base* $\mathcal{B}$.
d) *Determinare la matrice diagonalizzante* P *(cioé la matrice* P *tale che* $P^{-1}AP = D$*).*

Esercizio 11.2 (Esercizio 9.3)**.** *Sia* T *l'endomorfismo di* $\mathbb{R}^3$ *definito da*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

a) *Stabilire se esistono autovettori di* T *ed eventualmente determinarli.*
b) *Stabilire se* T *è diagonalizzabile.*
c) *Determinare la base rispetto alla quale* T *ha matrice associata* D *diagonale e determinare la matrice diagonale* D *e la matrice* P *diagonalizzante (cioé tale che* $P^{-1}AP = D$*).*

Esercizio 11.3 (Esercizio 9.7)**.** *Date le matrici*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

a) *Si determini il polinomio caratteristico di ciascuna matrice.*
b) *Si determinino gli autovalori, e i relativi autospazi, di ciascuna matrice.*
c) *Si stabilisca se le matrici sono diagonalizzabili.*

Esercizio 11.4 (Esercizio 9.8)**.** *Si consideri la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) *Determinare autovalori e autovettori di* A.
b) *Stabilire se la matrice* A *è diagonalizzabile.*

Esercizio 11.5 (Esercizio 9.9)**.** *Sia* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *l'endomorfismo a cui è associata la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

a) *Si determinino gli autovalori di* T *e si stabilisca se* T *è diagonalizzabile.*
b) *Si determini una base di* R^3 *formata da autovettori di* T.

Esercizio 11.6 (Esercizio 9.14)**.** *Sia* S *l'endomorfismo di* $\mathbb{R}^4$ *con matrice associata*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica.

a) *Determinare autovalori e autovettori di* S.
b) *Stabilire se* S *è diagonalizzabile e in caso positivo individuare la matrice diagonalizzante.*

Esercizio 11.7 (Esercizio 9.20). *Data la matrice*

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & k-1 & 4 \\ 1 & 0 & k & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) *Discutere la diagonalizzabiltà di M al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$.*
b) *Fissato a piacere un valore di k per cui M è diagonalizzabile, determinare per tale k la matrice P diagonalizzante.*

Esercizio 11.8 (Esercizio 9.21). *Sia A la matrice dipendente dal parametro reale*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ k-3 & 2-k & 0 & -k \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2-k & k & 0 & k+2 \end{pmatrix}$$

a) *Discutere la diagonalizzabiltà di A al variare di k.*
b) *Determinare una base di $\mathbb{R}^4$ costituita da autovettori di A per un valore opportuno di k.*

Esercizio 11.9 (Esercizio 9.22). *Data la matrice*

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ k-1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

a) *Si discuta la diagonalizzabiltà di M al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$.*
b) *Per $k = 2$, si determini una base di $\mathbb{R}^4$ formata da autovettori di M.*

Esercizio 11.10 (Abate Esempio 14.1). *Sia $\mathcal{B} = (e_1 + e_2, e_1 - e_2)$ una base di $\mathbb{R}^2$ e $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'unico endomorfismo tale che:*

$$T(1,1) = (3-1) \quad e \quad T(1,-1) = (9,-3).$$

Determinare autovalori e autospazi di T, dimostrare che T è diagonalizzabile e trovare una base di $\mathbb{R}^2$ formata da autovettori.

Esercizio 11.11 (Abate Esempio 14.2). *Trova per quali valori di $t \in \mathbb{C}$ la matrice*

$$A_t = \begin{pmatrix} t & 1 & 2 \\ 1 & t & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile (più precisamente: tale che l'operatore $L_A : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ la cui matrice rispetto alla base canonica è A è diagonalizzabile). Per tali valori di t esibire una base di autovettori e una matrice che rende A_t diagonale.

Esercizio 11.12. *Sia $T : \mathbb{R}_{\leq 3}[t] \to \mathbb{R}_{\leq 3}[t]$ l'endomorfismo $T(p)(t) = (t+1)p''(t^2)$, dove $p''(t^2)$ è la derivata seconda del polinomio p valutata in t^2. Determinare autovalori e autospazi di T.*

Esercizio 11.13 (Esercizio 8.14). *Sia T l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ cos definito:*

$$T(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_3, -2x_1 + x_2 + x_3, x_2 + 2x_3).$$

a) *Scrivere la matrice associata a T rispetto alle basi canoniche e determinare il nucleo e l'immagine di T.*
b) *Stabilire se T è iniettiva. Trovare, al variare del parametro reale k, tutti i vettori v tali che $T(v) = (3, 3, k)$.*

Esercizio 11.14 (Esercizio 8.16). *Si consideri il seguente endomorfismo di $\mathbb{R}^4$*

$$T(x, y, z, w) = (-x + z,\ 2y,\ x - 2z,\ w)$$

a) *Si determino le dimensioni di immagine e nucleo di T e si stabilisca se T è invertibile.*
b) *Si determini l'inversa T^{-1}.*

Esercizio 11.15 (Esercizio 8.22)**.** *Sia* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *l'applicazione lineare tale che*

$$T(x, y) = (kx + 4y,\ x + ky,\ y)$$

dove $k \in \mathbb{R}$ *è un parametro reale.*

Stabilire se T *è iniettiva e/o suriettiva al variare del parametro* k*.*

Esercizio 11.16 (Eserczio 8.23)**.** *Sia* $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ *l'applicazione lineare definita dalla matrice*

$$A = M(T) = \begin{pmatrix} 5k & 1 & 3k+4 & 0 \\ k+1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & k+5 & 1 & k+3 \\ 2k^2 & 0 & k & 0 \end{pmatrix}$$

a) *Discutere l'iniettività e suriettività di* T *al variare del parametro reale* k*.*
b) *Determinare la dimensione di immagine e nucleo di* T *al variare di* k*.*

Esercizio 11.17 (Esercizio 8.24)**.** *Sia* $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ *l'applicazione lineare tale che*

$$T(x, y, z, w) = (-x - y + z + w,\ -x + 2y - z,\ -x + y + 3z - 3w)$$

(1) *Determinare la matrice* A *associata a* T *rispetto alla base canonica.*
(2) *Determinare la dimensione e una base dello spazio vettoriale* $\mathrm{Im}(T) \subseteq \mathbb{R}^3$*.*
(3) *Determinare la dimensione e una base dello spazio vettoriale* $\mathrm{N}(T) \subseteq \mathbb{R}^4$

Esercizio 11.18 (esercizio 8.25)**.** *Sia* $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ *l'applicazione lineare tale che*

$$T(x, y, z, w) = (x - 2y + 3z,\ x - y + (k+3)z + 2w,\ 2x - 3y + (k+6)z + (k+1)w)$$

dove k *è un parametro reale.*

Stabilire se esistono valori di k *per cui* T *è iniettiva e/o suriettiva.*