CORSI DI LAUREA IN MATEMATICA E FISICA

FOGLIO DI ESERCIZI # 10– GEOMETRIA 1

Esercizio 10.1 (Esercizio 8.1). *Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione definita da $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2, x_2, 2x_3)$. Stabilire se T è lineare.*

Esercizio 10.2 (Esercizio 8.3). *Stabilire se esiste una applicazione lineare $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che*

$$T(1,2) = (3,0), \qquad T(2,7) = (4,5), \qquad T(1,5) = (1,4)$$

Esercizio 10.3 (Esercizio 8.4). *Stabilire se esiste una applicazione lineare $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che*

$$T(1,2) = (3,0), \qquad T(2,4) = (5,0), \qquad T(0,1) = (1,1)$$

Esercizio 10.4 (Esercizio 8.5). *Determinare una applicazione lineare $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che*

$$T(1,1) = (1,2), \qquad T(0,2) = (4,4)$$

Esercizio 10.5 (Esercizio 8.6). *Sia $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione definita da $T(x,y) = (x+y, 2x, x-y)$.*

a) *Verificare che T è lineare.*
b) *Determinare Nucleo e Immagine di T.*
c) *Determinare $T(1,2)$.*

Esercizio 10.6 (Esercizio 8.7). *Sia $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita sulla base canonica di $\mathbb{R}^2$ nel seguente modo: $T(e_1) = (1,2,1)$, $T(e_2) = (1,0,-1)$.*

a) *Esplicitare $T(x,y)$.*
b) *Stabilire se $(3,4,1)$ appartiene a $\mathrm{Im}(T)$.*

Esercizio 10.7 (Esempio 5.1 Ab-dF). *Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione definita da $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_3, 2x_2 + 3x_3, -x_3)$.*

a) *Dimostrare che T è lineare.*
b) *Trovare una base di $Ker(T)$ ed una di $Im(T)$.*
c) *Descrivere il sottospazio $T(W)$, dove $W = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid 3x_1 + x_3 = 0\}$ e trovarne una base.*

Esercizio 10.8 (Esempio 5.2- Ab-dF). *Siano $v_1 = (0,1,2,3)$, $v_2 = (1,1,0,0)$, $v_3 = (0,0,1,1)$ vettori di $\mathbb{R}^4$. Esibire un'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tale che $T(e_j) = v_j$ per $j = 1,2,3$. Tale applicazione è unica?*

Esercizio 10.9 (Esempio 5.3 Ab-dF). *Data*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 5 & 2 & 7 & 1 \\ 4 & 3 & 7 & -2 \end{pmatrix}$$

Calcolare $L_A(1,1,0,1)$, trovare $Ker(L_A)$ e $Im(L_A)$ e verificare il teorema di nullità piú rango.

Esercizio 10.10 (Esempio 5.11- Ab-dF). *Siano $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ e $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ le applicazioni lineari date da $S(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2 + x_3)$ e $T(y_1, y_2) = (y_1 + y_2, 2y_1 + 2y_2, 0, -y_1 - y_2)$. Trovare una base (v_1, v_2, v_3) di $\mathbb{R}^3$, una (u_1, u_2) di $\mathbb{R}^2$ e una (w_1, w_2, w_3, w_4) di $\mathbb{R}^4$, tali che $S(v_1) = O$, $S(v_2) = u_1$, $S(v_3) = u_1$, $T(u_1) = O$, $T(u_2) = w_1$.*

Esercizio 10.11 (Esercizio 5.11- Ab-dF). *Sia $T : V \to W$ un'applicazione fra spazi vettoriali. Dimostrare che T è lineare se e solo se $\Gamma = \{(v, T(v)) \in V \times W \mid v \in W\}$ è un sottospazio di $V \times W$.*

Esercizio 10.12 (Esercizio 5.12- Ab-dF). *Sia $T : V \to W$ lineare, e $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ una base di V. Dimostrare che T è iniettiva se e solo se $T(v_1), \dots, T(v_n)$ sono linearmente indipendenti.*

Esercizio 10.13 (Esercizio 5.15- Ab-dF). *Sia $T : V \to W$ lineare, $V_1 \subseteq V$ un sottospazio di V e $W_1 \subseteq W$ un sottospazio di W. Dimostrare che $T(V_1) = \{T(v) \mid v \in V_1\}$ è un sottospazio di W e che $T^{-1}(W_1) = \{v \in V \mid T(v) \in W_1\}$ è un sottospazio di V.*

Esercizio 10.14 (Esercizio 5.16- Ab-dF). *In ciascuno dei tre casi seguenti scoprire se è possibile costruire applicazioni lineari che soddisfano le condizioni indicate, e in caso ne esistano piú di una, trovarne almeno due distinte.*

a) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ *surgettiva e tale che* $Ker(T) = \langle e_1 + e_2 + e_3 \rangle$;
b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *tale che* $Ker(T) = \langle (1, 1) \rangle$;
c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *iniettiva e tale che* $Im(T) = \langle 2e_1 + e_3, -e_1 \rangle$