CORSI DI LAUREA IN MATEMATICA E FISICA

FOGLIO DI ESERCIZI # 9– GEOMETRIA 1

Esercizio 9.1. *Sia n un intero ≥ 2. Si dimostri che, per ogni campo $\mathbb{K}$, la seguente affermazione è verificata: se $A = (a_{ij})_{i,j} \in M_n(\mathbb{K})$ ha due righe (risp. colonne) uguali, allora* $\det(A) = 0$.

Soluzione:

Poiché $\det(A^T) = \det(A)$, è sufficiente dimostrare l'asserto nel caso in cui A abbia due righe uguali. Siano dunque $r, s \in \{1, \ldots, n\}$ tali che $r < s$ e le righe $A^{(r)}$ e $A^{(s)}$ di A coincidono, cioè $a_{r\ell} = a_{s\ell}$ per ogni $\ell \in \{1, \ldots, n\}$. Per ogni $p \in \sigma_n$, indichiamo con T_p la trasposizione di $\{1, \ldots, n\}$ che scambia tra loro $p(r)$ e $p(s)$. Definiamo:

$$L := \{p \in \sigma_n \,|\, p(r) < p(s)\} \text{ e } L^* := \{p \in \sigma_n \,|\, p(s) < p(r)\}.$$

Evidentemente, $\sigma_n = L \sqcup L^*$ e l'applicazione $\Psi : L \longrightarrow L^*$, definita ponendo $\Psi(p) := T_p \circ p$, è una bigezione (si verifichi che Ψ è ben definita e che $\Psi^{-1}(q) := T_q \circ q$ per ogni $q \in L^*$). Per semplicità, poniamo $p^* = \Psi(p)$ per ogni $p \in L$. Osserviamo che, per ogni $p \in \sigma_n$, valgono:

$$a_{r,p(r)} = a_{s,p(r)} = a_{s,p^*(s)}, \quad a_{s,p(s)} = a_{r,p(s)} = a_{r,p^*(r)}$$

e

$$a_{i,p(i)} = a_{i,p^*(i)} \text{ per ogni } i \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{p(r), p(s)\}.$$

Segue che:

$$\begin{aligned}
\det(A) = & \sum_{p \in L} \epsilon(p) a_{1,p(1)} \cdots a_{r-1,p(r-1)} a_{r,p(r)} a_{r+1,p(r+1)} \cdots a_{s-1,p(s-1)} a_{s,p(s)} a_{s+1,p(s+1)} \cdots a_{n,p(n)} + \\
& + \sum_{q \in L^*} \epsilon(q) a_{1,q(1)} \cdots a_{n,q(n)} = \\
= & \sum_{p \in L} \epsilon(T_p \circ T_p \circ p) a_{1,p^*(1)} \cdots a_{r-1,p^*(r-1)} a_{s,p^*(s)} a_{r+1,p^*(r+1)} \cdots a_{s-1,p^*(s-1)} a_{r,p^*(r)} a_{s+1,p^*(s+1)} \cdots a_{n,p^*(n)} + \\
& + \sum_{q \in L^*} \epsilon(q) a_{1,q(1)} \cdots a_{n,q(n)} = \\
= & \sum_{p \in L} \epsilon(T_p) \epsilon(p^*) a_{1,p^*(1)} \cdots a_{r-1,p^*(r-1)} a_{r,p^*(r)} a_{r+1,p^*(r+1)} \cdots a_{s-1,p^*(s-1)} a_{s,p^*(s)} a_{s+1,p^*(s+1)} \cdots a_{n,p^*(n)} + \\
& + \sum_{q \in L^*} \epsilon(q) a_{1,q(1)} \cdots a_{n,q(n)} = \\
= & -\sum_{p \in L} \epsilon(p^*) a_{1,p^*(1)} \cdots a_{n,p^*(n)} + \sum_{q \in L^*} \epsilon(q) a_{1,q(1)} \cdots a_{n,q(n)} = \big[\text{ponendo } q := p^* \text{ nella prima sommatoria}\big] \\
= & -\sum_{q \in L^*} \epsilon(q) a_{1,q(1)} \cdots a_{n,q(n)} + \sum_{q \in L^*} \epsilon(q) a_{1,q(1)} \cdots a_{n,q(n)} = 0.
\end{aligned}$$

■

Esercizio 9.2. *Sia n un intero positivo. Si dimostri che, per ogni campo $\mathbb{K}$, vale la seguente formula di Binet: per ogni $A, B \in M_n(\mathbb{K})$, si ha* $\det(AB) = \det(A)\det(B)$. *Inoltre, se A è invertibile, allora* $\det(A) \neq 0$ *e* $\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$.

Soluzione:

Ripeti la dimostrazione di Corollario 6.3 a p. 79 di Sernesi usando l'Esercizio 9.1. ■

Esercizio 9.3. *Sia n un intero positivo. Si dimostri che, per ogni campo $\mathbb{K}$, la funzione* $\det : M_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$ *è l'unica funzione $f : M_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$ ad avere le seguenti tre proprietà:*

(*D*1) *f è multilineare sulle righe.*
(*D*2′) *Se $A \in M_n(\mathbb{K})$ possiede due righe uguali, allora $f(A) = 0$.*
(*D*3) $f(I_n) = 1$.

Soluzione:

Ripeti la dimostrazione di Corollario 6.3 a p. 79 di Sernesi con "det"$= f$ e "B"$= I_n$.[1] ■

Esercizio 9.4. *Sia n un intero positivo e sia $\mathbb{K}$ un campo arbitrario. Si dimotri che, se una funzione $f : M_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$ soddisfa le proprietà $(D1)$ e $(D2')$ enunciate nel precedente esercizio, allora f è alternante sulle righe, ovvero vale:*

$(D2)$ *Se la matrice B è ottenuta da $A \in M_n(\mathbb{K})$ scambiando tra di loro due righe diverse, allora $f(B) = -f(A)$.*

Soluzione:

Se $n = 1$, allora non c'è nulla da dimostrare. Supponiamo $n \geq 2$. Siano $r, s \in \{1, \ldots, n\}$ tali che $r < s$ e B è ottenuta da A scambiando la r–esima riga con la s–esima. Da $(D1)$ segue che:

$$f\begin{pmatrix} A^{(1)} \\ \vdots \\ A^{(r-1)} \\ A^{(r)} + A^{(s)} \\ A^{(r+1)} \\ \vdots \\ A^{(s-1)} \\ A^{(r)} + A^{(s)} \\ A^{(s+1)} \\ \vdots \\ A^{(n)} \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} A^{(1)} \\ \vdots \\ A^{(r-1)} \\ A^{(r)} \\ A^{(r+1)} \\ \vdots \\ A^{(s-1)} \\ A^{(r)} \\ A^{(s+1)} \\ \vdots \\ A^{(n)} \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} A^{(1)} \\ \vdots \\ A^{(r-1)} \\ A^{(r)} \\ A^{(r+1)} \\ \vdots \\ A^{(s-1)} \\ A^{(s)} \\ A^{(s+1)} \\ \vdots \\ A^{(n)} \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} A^{(1)} \\ \vdots \\ A^{(r-1)} \\ A^{(s)} \\ A^{(r+1)} \\ \vdots \\ A^{(s-1)} \\ A^{(r)} \\ A^{(s+1)} \\ \vdots \\ A^{(n)} \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} A^{(1)} \\ \vdots \\ A^{(r-1)} \\ A^{(s)} \\ A^{(r+1)} \\ \vdots \\ A^{(s-1)} \\ A^{(s)} \\ A^{(s+1)} \\ \vdots \\ A^{(n)} \end{pmatrix}.$$

Grazie a $(D2')$, si ha che $0 = 0 + f(A) + f(B) + 0 = f(A) + f(B)$ e quindi $(D2)$ è verificata. ■

Esercizio 9.5. *Siano m e n due interi positivi e sia $\mathbb{K}$ un campo arbitrario. Definiamo la relazione $\mathscr{RC}$ su $M_{m,n}(\mathbb{K})$ ponendo: $A \mathscr{RC} B$ se B si può ottenere da A mediante un numero finito di operazioni elementari sulle righe e sulle colonne.*

(1) *Si dimostri che, date due matrici $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, $A \mathscr{RC} B$ se e soltanto se esistono $M \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{K})$ e $N \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tali che $B = MAN$.*
(2) *Si dimostri che $\mathscr{RC}$ è una relazione di equivalenza su $M_{m,n}(\mathbb{K})$.*
(3) *Sia $h := \min\{m, n\}$. Per ogni $r \in \{0, 1, \ldots, h\}$, definiamo la matrice $S_{m,n}(r) = (s_{ij})_{i,j} \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ ponendo $s_{ii} = 1$ se $i \in \{1, \ldots, r\}$ e $s_{ij} = 0$ altrimenti*[2]*. Si provi che, per ogni $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, vale:*
$$A \mathscr{RC}\, S_{m,n}(\mathrm{rk}(A)).$$
(4) *Sia $\pi : M_{m,n}(\mathbb{K}) \longrightarrow M_{m,n}(\mathbb{K})/_{\mathscr{RC}}$ la proiezione naturale al quoziente $A \overset{\pi}{\mapsto} [A]_{\mathscr{RC}}$ e sia $\Phi : M_{m,n}(\mathbb{K}) \longrightarrow \{0, 1, \ldots, h\}$ la funzione definita ponendo $\Phi(A) := \mathrm{rk}(A)$ per ogni $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$. Si dimostri che Φ* passa al quoziente rispetto a *$\mathscr{RC}$, ovvero esiste, ed è unica, una funzione $\varphi : M_{m,n}(\mathbb{K})/_{\mathscr{RC}} \longrightarrow \{0, 1, \ldots, h\}$ tale che il seguente diagramma commuta*
$$\begin{array}{ccc} M_{m,n}(\mathbb{K}) & \xrightarrow{\Phi} & \{0,1,\ldots,h\} \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & \nearrow_{\varphi} & \\ M_{m,n}(\mathbb{K})/_{\mathscr{RC}} & & , \end{array}$$
ovvero tale che $\Phi = \varphi \circ \pi$.
(5) *Si dimostri che la funzione φ definita al punto (4) è una bigezione.*

Soluzione:

(1) Vedi il punto 9 a pagina 47 di Sernesi.

(2) $\mathscr{RC}$ è evidentemente riflessiva: per ogni $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, $A = I_m A I_n$ e quindi $A \mathscr{RC} A$.

[1] I dettagli di tale dimostrazione sono stati fatti in classe.

[2] Se $r = 0$, allora $S_{m,n}(r)$ è la matrice nulla di $M_{m,n}(\mathbb{K})$.

Proviamo che $\mathscr{RC}$ è simmetrica. Siano $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ tali che $A\,\mathscr{RC}\,B$. Dobbiamo provare che $B\,\mathscr{RC}\,A$. Grazie a (1), esistono $M \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{K})$ e $N \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tali che $B = MAN$. Segue che $A = M^{-1}BN^{-1}$ e quindi $B\,\mathscr{RC}\,A$.

La transitività di $\mathscr{RC}$ è evidente dalla definizione di $\mathscr{RC}$ stessa. Ad ogni modo dimostriamolo usando (1). Sia $C \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ tale che $B\,\mathscr{RC}\,C$ e siano $P \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{K})$ e $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tali che $C = PBQ$. Poiché $C = PBQ = (PM)A(NQ)$, $PM \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{K})$ e $NQ \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, abbiamo che $A\,\mathscr{RC}\,C$.

(3) Sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ e sia $r := \mathrm{rk}(A)$. Poiché le operazioni elementari sulle righe e sulle colonne di una matrice non alterano il rango della matrice stessa, applicando la tecnica di eliminazione di Gauss–Jordan ad A sia per righe che per colonne, otteniamo che $A\,\mathscr{RC}\,S_{m,n}(r)$.

(4) Cominciamo col dimostrare che, se una tale φ esiste, allora è unica. Supponiamo che φ_1 e φ_2 siano funzioni da $M_{m,n}(\mathbb{K})/_{\mathscr{RC}}$ in $\{0, 1, \ldots, h\}$ tali che $\varphi_1 \circ \pi = \Phi = \varphi_2 \circ \pi$. Sia $\alpha \in M_{m,n}(\mathbb{K})/_{\mathscr{RC}}$. Dobbiamo dimostrare che $\varphi_1(\alpha) = \varphi_2(\alpha)$. Poiché π è surgettiva, esiste $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ tale che $\pi(A) = [A]_{\mathscr{RC}} = \alpha$. Segue che:

$$\varphi_1(\alpha) = \varphi_1(\pi(A)) = (\varphi_1 \circ \pi)(A) = (\varphi_2 \circ \pi)(A) = \varphi_2(\pi(A)) = \varphi_2(\alpha).$$

Definiamo dunque la funzione $\varphi : M_{m,n}(\mathbb{K})/_{\mathscr{RC}} \longrightarrow \{0, 1, \ldots, h\}$ come segue: per ogni $\alpha \in M_{m,n}(\mathbb{K})/_{\mathscr{RC}}$, scegliamo $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ tale che $\pi(A) = \alpha$ (cioè $A \in \alpha$) e poniamo

$$\varphi(\alpha) := \mathrm{rk}(A).$$

Evidentemente, se φ è ben definita, allora φ è la funzione cercata, essendo $\Phi = \varphi \circ \pi$ per definizione di φ. Proviamo quindi che φ è ben definita, cioè che $\varphi(\alpha)$ non dipende dalla scelta di A. Sia $A' \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ un'altra matrice tale che $\pi(A') = \alpha$, cioè tale che $A' \in \alpha$. Poiché A e A' appartengono alla stessa $\mathscr{RC}$–classe di equivalenza (cioé ad α), $A\,\mathscr{RC}\,A'$ e quindi, grazie all'invarianza del rango rispetto alle operazioni elementari sulle righe e sulle colonne, $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(A')$. ■

Esercizio 9.6 (**Gruppi matriciali speciali -** vedi anche Esercizio 3.9, 3.10 e 3.11 del "Foglio di esercizi 3")**.** *Sia n un intero positivo. Definiamo:*

(1) $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K}) := \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \mid \det(A) = 1\}$ *per ogni campo* $\mathbb{K}$*;*
(2) $\mathrm{SO}(n) := \{A \in \mathrm{O}(n) \mid \det(A) = 1\} = \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid A^T A = I_n,\ \det(A) = 1\}$*;*
(3) $\mathrm{SO}(1,3) := \{A \in \mathrm{O}(1,3) \mid \det(A) = 1\} = \{A \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R}) \mid A^T I_{1,3} A = I_{1,3}\}$*, ove $I_{1,3}$ è la matrice diagonale in $M_4(\mathbb{R})$ avente il primo elemento diagonale uguale a 1 e i restanti tre elementi diagonali uguali a -1;*
(4) $\mathrm{SU}(n) := \{A \in \mathrm{U}(n) \mid \det(A) = 1\} = \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \mid A^H A = I_n, \det(A) = 1\}$*, ove A^H è la* matrice trasposta coniugata di A (*anche detta* aggiunta hermitiana di A) *definita ponendo $A^H := (\overline{a_{ji}})_{i,j}$ se $A = (a_{ij})_{i,j}$.*

Dimostrare che:

(1′) $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ *è un sottogruppo di* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ *è detto* gruppo lineare speciale di ordine n (su $\mathbb{K}$).
(2′) $\mathrm{SO}(n)$ *è un sottogruppo di* $\mathrm{O}(n)$. $\mathrm{SO}(n)$ *è detto* gruppo ortogonale speciale di ordine n.[3]
(3′) $\mathrm{SO}(1,3)$ *è un sottogruppo di* $\mathrm{O}(1,3)$. $\mathrm{SO}(1,3)$ *è detto* gruppo di Lorentz proprio.[4]
(4′) $\mathrm{SU}(n)$ *è un sottogruppo di* $\mathrm{U}(n)$. $\mathrm{SU}(n)$ *si chiama* gruppo unitario speciale di ordine n.[5]

Soluzione:

Segue subito dalla formula di Binet. ■

Esercizio 9.7. *Si calcoli il determinante della seguente matrice $A \in M_6(\mathbb{R})$ e si dica se è invertibile:*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 7 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

[3] Il gruppo SO(3) riveste un ruolo molto importante in Fisica, i suoi elementi corrispondono alle rotazioni spaziali.

[4] Il ruolo di SO(1, 3) è cruciale nelle teorie relativistiche.

[5] Per chiarire la rilevanza in Fisica dei gruppi unitari e unitari speciali citiamo, a titolo di esempio, il fatto che il prodotto SU(3) × SU(2) × U(1) è il gruppo di simmetria interna del *modello standard* (ovvero la teoria unificata che descrive tre delle quattro interazioni fondamentali: interazione elettromagnetica, nucleare forte e nucleare debole). In Fisica, per gruppo di simmetria interna (o *gruppo di gauge*) di una teoria si intende, in generale, un gruppo nel quale gli elementi si possono rappresentare (mediante omomorfismo) come trasformazioni rispetto alle quali la teoria è invariante.

Esercizio 9.8 (Esempio 9.4 di Ab-deF[6]). *Siano $A, A^* \in M_n(\mathbb{K})$ matrici partizionate a blocchi come segue*

$$A = \left(\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline \mathbf{0}_1 & D \end{array}\right) \quad e \quad A^* = \left(\begin{array}{c|c} B & \mathbf{0}_2 \\ \hline E & D \end{array}\right)$$

dove $B \in M_p(\mathbb{K})$, $C \in M_{p,q}(\mathbb{K})$, $\mathbf{0}_2$ è la matrice nulla in $M_{p,q}(\mathbb{K})$, $E \in M_{q,p}(\mathbb{K})$, $\mathbf{0}_1$ è la matrice nulla in $M_{q,p}(\mathbb{K})$ e $D \in M_q(\mathbb{K})$ per qualche $p, q \in \mathbb{N}^*$ con $p+q = n$. Si provi che $\det(A) = \det(B)\det(C) = \det(A^*)$.

Esercizio 9.9. *Sia $A = (A_{ij})_{i,j} \in M_n(\mathbb{K})$ una matrice triangolare superiore a blocchi ove $A_{ij} \in M_{m_i,m_j}(\mathbb{K})$ per qualche $m_1, \ldots, m_h \in \mathbb{N}$ tali che $m_1 + \ldots + m_h = n$:*

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1h} \\ \mathbf{0} & A_{22} & \cdots & A_{2h} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & A_{hh} \end{pmatrix}.$$

Si dimostri che $\det(A) = \det(A_{11})\det(A_{22})\cdots\det(A_{hh})$. Si provi inoltre che la stessa uguaglianza sussiste anche nel caso triangolare inferiore a blocchi.

Esercizio 9.10. *Si dica per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ la seguente matrice $A_t \in M_6(\mathbb{R})$ è singolare.*

$$A_t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 4 & 5 & 6 & 7 & t \end{pmatrix}$$

Esercizio 9.11. *Sia n un intero ≥ 2, siano $x_1, \ldots, x_n$ elementi di un campo $\mathbb{K}$ e sia $V(x_1, \ldots, x_n) \in M_n(\mathbb{K})$ la seguente matrice, detta* matrice di Vandermonde relativa a *$(x_1, \ldots, x_n)$:*

$$V(x_1, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Si dimostri che $\det(V(x_1, \ldots, x_n)) = \prod_{(i,j)\in T_n}(x_j - x_i)$, dove $T_n := \{(i,j) \in \{1, \ldots, n\} \,|\, i < j\}$ e "$\prod$" è il simbolo di produttoria, che indica il prodotto in $\mathbb{K}$ [7]. Se ne deduca che $V(x_1, \ldots, x_n)$ è invertibile se e soltanto se gli elementi $x_1, \ldots, x_n$ sono a due a due distinti.

Esercizio 9.12. *Sia $n \in \mathbb{N}$, siano $x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}$ elementi a due a due distinti di un campo $\mathbb{K}$ e siano $y_1, \ldots, y_n, y_{n+1}$ elementi di $\mathbb{K}$ (non necessariamente distinti). Indichiamo con $\mathbb{K}_{\leq n}[X]$ il $\mathbb{K}$–spazio vettoriale dei polinomi di grado $\leq n$ a coefficienti in $\mathbb{K}$. Si dimostri che esiste un unico polinomio $P \in \mathbb{K}_{\leq n}[X]$ tale che $P(x_h) = y_h$ per ogni $h \in \{1, \ldots, n, n+1\}$.*

Esercizio 9.13. *Sia $n \in \mathbb{N}$, siano $x_1, \ldots, x_{n+1}$ elementi a due a due distinti di un campo $\mathbb{K}$ e sia $\mathbb{K}_{\leq n}[X]$ il $\mathbb{K}$–spazio vettoriale dei polinomi di grado $\leq n$ a coefficienti in $\mathbb{K}$. Per ogni $k \in \{1, \ldots, n+1\}$, definiamo il polinomio $L_k \in \mathbb{K}_{\leq n}[X]$ ponendo*

$$L_k(X) := \textstyle\prod_{h\in\{1,\ldots,n+1\}\setminus\{k\}}(x_k - x_h)^{-1}(X - x_h).$$

Si dimostrino le seguenti affermazioni:

(1) *Per ogni $k, h \in \{1, \ldots, n+1\}$, $L_k(x_h) = \delta_{kh}$, ove $\delta_{kh} = 1 \in \mathbb{K}$ se $k = h$ e $\delta_{kh} = 0 \in \mathbb{K}$ se $k \neq h$.*
(2) *$(L_1, \ldots, L_{n+1})$ è una base di $\mathbb{K}_{\leq n}[X]$.*

---

[6]Ab-deF sta ad indicare l'eserciziario "Esercizi di geometria" di Abate e de Fabritiis.

[7]Usualmente, per semplicità , si usa il simbolo $\prod_{i<j}(x_j - x_i)$ al posto di $\prod_{(i,j)\in T_n}(x_j - x_i)$.

(3) *Dati $y_1, \ldots, y_{n+1} \in \mathbb{K}$ (non necessariamente distinti), il polinomio $P(X) := \sum_{h=1}^{n+1} y_k L_k(X) \in \mathbb{K}_{\leq n}[X]$ ha la seguente proprietà :*

$$(*) \qquad P(x_h) = y_h \text{ per ogni } h \in \{1, \ldots, n+1\}\ ^8.$$

(4) *L'applicazione $\varphi : \mathbb{K}_{\leq n}[X] \longrightarrow \mathbb{K}^{n+1}$ definita ponendo*

$$\varphi(Q) := (Q(x_1), \ldots, Q(x_{n+1})) \text{ per ogni } Q \in \mathbb{K}_{\leq n}[X]$$

è un isomorfismo lineare. Dedurre da questo fatto che, dati $y_1, \ldots, y_{n+1} \in \mathbb{K}$ (non necessariamente distinti), il polinomio P definito al punto (3) è l'unico polinomio in $\mathbb{K}_{\leq n}[X]$ avente la proprietà $(*)$.

Esercizio 9.14. *Siano v_1, v_2, v_3 tre vettori in $\mathbb{R}^3$, sia $\mathrm{Vol}(v_1, v_2, v_3)$ il volume del parallelepipedo generato da v_1, v_2 e v_3 e sia $A \in M_3(\mathbb{R})$. Si dimostri la seguente formula:*

$$\mathrm{Vol}(Av_1, Av_2, Av_3) = |\det(A)| \cdot \mathrm{Vol}(v_1, v_2, v_3).$$

Esercizio 9.15. *Siano $m, n \in \mathbb{N}^*$, sia $A \in M_m(\mathbb{K})$ e sia $B \in M_n(\mathbb{K})$. Provare che $\det(A \otimes B) = (\det(A))^n(\det(B))^m$.*[9]

Si svolgano i seguenti esercizi su Ab-deF: Esempio 9.1, 9.2, 9.3, 9.4, 9.11 e Esercizio 9.1, 9.2, 9.3, 9.5, 9.6, 9.7, 9.11, 9.12, 9.17[10], 9.20, 9.21 e 9.22.

Principio dei minori orlati. Ricordiamo che, data una matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ di rango r, se la sua sottomatrice $A(i_1, \ldots, i_r | j_1, \ldots, j_r)$ è invertibile, allora si ha:

- $(A^{(i_1)}, \ldots, A^{(i_r)})$ è una base del sottospazio vettoriale $\langle A^{(1)}, \ldots, A^{(m)} \rangle$ di $\mathbb{K}^n = M_{1,n}(\mathbb{K})$ generato dalle righe di A.
- $(A_{(j_1)}, \ldots, A_{(j_r)})$ è una base del sottospazio vettoriale $\langle A_{(1)}, \ldots, A_{(n)} \rangle$ di $\mathbb{K}^m = M_{m,1}(\mathbb{K})$ generato dalle colonne di A.

Esercizio 9.16. *Per ciascuna delle seguenti matrici*

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R}) \quad e \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in M_{4,5}(\mathbb{R}),$$

individuare una sottomatrice quadrata invertibile di ordine massimo. Dedurre il valore di $\mathrm{rk}(A_1)$ e di $\mathrm{rk}(A_2)$.

Esercizio 9.17. *Sia W il sottospazio vettoriale di $\mathbb{C}^4$ generato dai vettori (colonna) $w_1 = (1, \mathrm{i}, 1, -\mathrm{i})^T$, $w_2 = (\mathrm{i}, -1, \mathrm{i}, 1)^T$ e $w_3 = (-\mathrm{i}, 1, -\mathrm{i}, 1)^T$. Si estragga da (w_1, w_2, w_3) una base di W e la si completi ad una base di $\mathbb{C}^4$.*

Equazioni parametriche ed equazioni cartesiane di sottospazi vettoriali di $\mathbb{K}^n$. Sia W un sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^n = M_{n,1}(\mathbb{K})$, sia $(\mathcal{S})$ un sistema lineare omogeneo $m \times n$ a coefficienti in $\mathbb{K}$ e siano $w_1 = (w_{1,1}, \ldots, w_{n,1})^T, \ldots, w_s = (w_{1,s}, \ldots, w_{n,s})^T$ vettori di W.

Se $\mathrm{Sol}(\mathcal{S}) = \mathrm{W}$ allora le equazioni di $(\mathcal{S})$ si dicono *equazioni cartesiane di W in $\mathbb{K}^n$* (rispetto alla base canonica).[11] Se $(w_1, \ldots, w_s)$ è una base di W allora le equazioni

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = t_1 w_1 + \ldots + t_s w_s \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x_1 = & t_1 w_{1,1} + \ldots + t_s w_{1,s} \\ \vdots & \vdots \\ x_n = & t_1 w_{n,1} + \ldots + t_s w_{n,s} \end{cases} \quad \text{con } t_1, \ldots, t_s \in \mathbb{K}$$

[8]Il polinomio P si dice *polinomio interpolante lagrangiano* ("*Lagrangian interpolating polynomial*" in inglese) relativo alle coppie $(x_1, y_1), \ldots, (x_{n+1}, y_{n+1})$.

[9]Vedi Esercizio 5.13 sul "Foglio di esercizi 5" per la definizione di $A \otimes B$.

[10]Si tenga presente che, data $A \in M_n(\mathbb{K})$, la matrice $\mathrm{Cof}(A) \in M_n(\mathbb{K})$ dei cofattori di A per Ab-deF (vedi Esempio 9.6, p. 94) coincide con la trasposta della matrice $\mathrm{cof}(A) \in M_n(\mathbb{K})$ dei cofattori di A per Sernesi (vedi Definizione 6.8, p. 81).

[11]$(\mathcal{S})$ si dice *sistema di equazioni cartesiane di W in $\mathbb{K}^n$* (rispetto alla base canonica).

si dicono *equazioni parametriche di* W *in* $\mathbb{K}^n$ (rispetto alla base canonica). Evidentemente, sia le equazioni cartesiane che quelle parametriche non sono univocamente determinate da W.

Se sono assegnate equazioni cartesiane $(\mathcal{S})$ di W, allora per trovare equazioni parametriche di W è sufficiente risolvere il sistema omogeneo $(\mathcal{S})$.

Viceversa, se sono assegnate equazioni parametriche di W, e quindi è assegnata una base $(w_1, \dots, w_s)$ di W, allora per trovare equazioni cartesiane di W possiamo procedere come segue:

- si considera la matrice $A \in M_{s,n}(\mathbb{K})$ avente per righe $w_1^T, \dots, w_s^T$ [12] e si osserva che

$$\text{(RK)} \qquad (x_1, \dots, x_s)^T \in W \Longleftrightarrow \operatorname{rk}\left(\begin{array}{ccc} x_1 & \cdots & x_n \\ \hline & A & \end{array}\right) = s.$$

- si individua una sottomatrice quadrata invertibile $B = A(1, \dots, s|j_1, \dots, j_s)$ di A di ordine s e si definisce il sistema lineare omogeneo $(\mathcal{S})$ con $(n-s)$ equazioni nelle incognite $x_1, \dots, x_n$ imponendo che tutti i minori orlati di B in A siano nulli. Grazie a (RK) e al principio dei minori orlati, si ha che le equazioni di $(\mathcal{S})$ sono equazioni cartesiane di W.

A meno di riordinare gli indici di colonna di A e quindi le incognite $x_1, \dots, x_n$, possiamo supporre che $B = A(1, \dots, s|1, \dots, s)$. Allora si ha:

$$(x_1, \dots, x_s)^T \in W \Longleftrightarrow \operatorname{rk}\left(\begin{array}{c|c|c|c} x_1 \cdots x_s & x_{s+1} & \cdots & x_n \\ \hline B & A^{(s+1)} & \cdots & A^{(n)} \end{array}\right) = s$$

e quindi $W = \mathrm{Sol}(\mathcal{S})$, dove $(\mathcal{S})$ è definito come segue:

$$(\mathcal{S}) : \left\{\begin{array}{l} \det\left(\begin{array}{c|c} x_1 \cdots x_s & x_{s+1} \\ \hline B & A^{(s+1)} \end{array}\right) = 0 \\ \qquad\qquad \vdots \\ \det\left(\begin{array}{c|c} x_1 \cdots x_s & x_n \\ \hline B & A^{(n)} \end{array}\right) = 0 \end{array}\right. .$$

Esercizio 9.18. *Sia* W *il sottospazio vettoriale di* $\mathbb{R}^5$ *avente le seguenti equazioni cartesiane:*

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_5 = 0 \end{cases} .$$

Si scrivano delle equazioni parametriche di W *e se ne deduca la dimensione di* W.

Esercizio 9.19. *Sia* W *il sottospazio vettoriale di* $\mathbb{R}^4$ *descritto dalle seguenti equazioni parametriche:*

$$\begin{cases} x_1 = t - s \\ x_2 = 0 \\ x_3 = -t + s \qquad \text{con } t, s \in \mathbb{R}. \\ x_4 = t \\ x_5 = -t - 2s \end{cases}$$

Si scrivano delle equazioni cartesiane di W.

Esercizio 9.20 (Proiezione su sottospazi vettoriali). . *Sia* V *uno spazio vettoriale su* $\mathbb{K}$ *e siano* U *e* W *due sottospazi vettoriali di* V *tali che* $U \oplus W = V$. *Definiamo l'applicazione* $\rho_U : V \longrightarrow W$, *detta* proiezione di V su W lungo U, *come segue: dato* $v \in V$, *consideriamo gli unici vettori* $u \in U$ *e* $w \in W$ *tali che* $v = u + w$ *e definiamo* $\rho_U(v) := w$. *Si dimostri che* ρ_U *è lineare.*

Esercizio 9.21 (Esercizio 4, p. 149, Sernesi)**.** *Sia* W *il sottospazio vettoriale di* $\mathbb{R}^4$ *descritto dalle seguenti equazioni cartesiane:*

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} 2X_1 + X_3 = 0 \\ X_2 - 3X_4 = 0 \end{cases}$$

[12] Si considerano i vettori riga w_i^T anziché gli originali vettori colonna w_i solo perché, usualmente, è più pratico scrivere A anziché A^T.

e sia $U = \langle e_1, e_2 \rangle$*, dove* $e_1 = (1,0,0,0)^T$ *e* $e_2 = (0,1,0,0)^T$*. Dopo aver verificato che* $U \oplus W = \mathbb{R}^4$*, trovare l'epressione analitica della proiezione* $\rho_U : \mathbb{R}^4 \longrightarrow W$ *di* $\mathbb{R}^4$ *su* W *lungo* U

Si svolgano i seguenti esercizi su Ab-deF: Esempio 5.1, 5.2, 5.3, 5.6 e Esercizio 5.11, 5.12, 5.15, 5.16.