CORSI DI LAUREA IN MATEMATICA E FISICA

FOGLIO DI ESERCIZI # 8– GEOMETRIA 1

Esercizio 8.1 (Esercizio 6.1). *Calcolare il determinante delle seguenti matrici:*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -11 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

Esercizio 8.2 (Esercizio 6.2). *Calcolare il determinante delle seguenti matrici:*

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad A_5 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad A_6 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Esercizio 8.3. *Dimostrare che il determinante di una matrice antisimmetrica di ordine dispari è nullo.*

Esercizio 8.4 (Esercizio 6.3). *Calcolare il rango della seguente matrice A.*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k+2 & 0 \\ k^2-1 & 0 & 4-k \\ 1 & 2k-3 & 0 \end{pmatrix} \qquad k \in \mathbb{R}$$

Esercizio 8.5 (Esercizio 6.5). *Dopo avere stabilito se le seguenti matrici sono invertibili calcolarne l'inversa:*

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad A_5 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad A_6 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Esercizio 8.6. *Sia A la matrice reale*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ k & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

a) *Calcolare il determinante di A e stabilire per quali valori di k la matrice è invertibile.*
b) *Trovare la matrice inversa di A per $k = 1$.*

Esercizio 8.7. *Sia A la matrice reale*

$$A = \begin{pmatrix} k & k-1 & k \\ 0 & 2k-2 & 0 \\ 1 & k-1 & 2-k \end{pmatrix} \qquad (k \text{ reale}).$$

a) *Si determini per quali valori di k la matrice A è invertibile. Si calcoli la matrice inversa di A per $k = -1$.*
b) *Calcolare il rango di A al variare del parametro k.*

Esercizio 8.8. *Sia A_t la matrice reale*

$$A_t = \begin{pmatrix} 0 & t & 0 \\ 1 & 1 & t \\ 2 & t & 1 \end{pmatrix} \qquad (t \text{ reale}).$$

Stabilire per quali valori di t la matrice A_t è invertibile.

Esercizio 8.9. *Sia A la matrice reale*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3k & 8+2k & k-1 \\ 0 & 8k+8 & 0 \end{pmatrix} \qquad (t \text{ reale}).$$

a) *Calcolare il rango di A al variare del parametro k.*

b) *Esistono valori di k per i quali la matrice è invertibile?*

Esercizio 8.10 (Esercizio 6.9)**.** *Sia A la matrice reale*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ -4k & 4k-1 & k-2 \\ 0 & 1-4k & 0 \end{pmatrix} \quad (t \text{ reale}).$$

a) *Calcolare il rango di A al variare del parametro k.*
b) *Esistono valori di k per i quali la matrice è invertibile?*

Esercizio 8.11 (Esercizio 6.11)**.** *Sia A la matrice reale*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & k-4 \\ 2 & k & 0 \end{pmatrix} \quad (k \text{ reale}).$$

a) *Stabilire per quali valori di k la matrice A è invertibile.*
b) *Per i valori di k trovati al punto precedente determinare l'inversa di A.*

Esercizio 8.12 (Esercizio 6.12)**.** *Sia A la matrice reale*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & k \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3k \end{pmatrix} \quad (k \text{ reale}).$$

a) *Calcolare il rango di A al variare del parametro k.*
b) *Si determini il valore di k tale per cui la matrice A abbia determinante uguale a uno. Per tale valore di k, si calcoli la matrice inversa di A.*

Esercizio 8.13 (Esercizio 7.22)**.** *Siano dati i seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$:*

$$v_1 \equiv (2,1,1), \qquad v_2 \equiv (-1,1,2), \qquad v_3 \equiv (3,-2,-1), \qquad v_4 \equiv (4,-1,-2).$$

Stabilire se v_4 è combinazione lineare di v_1, v_2 e v_3.

Esercizio 8.14 (Esercizio 7.23)**.** *Siano dati i seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$:*

$$v_1 \equiv (1,1,1), \qquad v_2 \equiv (2,7,7), \qquad v_3 \equiv (0,k^2+2,3), \qquad v_4 \equiv (1,k+3,k^2+2).$$

Stabilire se v_4 è combinazione lineare di v_1, v_2 e v_3 al variare del parametro k.

Esercizio 8.15 (Esercizio 7.24)**.** *Determinare per quali valori del parametro reale k i seguenti vettori formano una base di $\mathbb{R}^3$.*

$$v_1 \equiv (1,2,-2), \qquad v_2 \equiv (1,1,-3), \qquad v_3 \equiv (3,7,k-6)$$

Esercizio 8.16 (Esercizio 7.26)**.**

a) *Mostrare che i vettori*

$$v_1 = (0,1,1), \quad v_2 = (-1,k,0), \quad v_3 = (1,1,k)$$

sono linearmente indipendenti per ogni valore di $k \in \mathbb{R}$.

b) *Esprimere il vettore $v = (2,1,2)$ come combinazione lineare di v_1, v_2, v_3.*

Esercizio 8.17 (Esercizio 7.26)**.** *In $\mathbb{R}^3$ siano*

$$v_1 = (k,2,1), \quad v_2 = (-2,1,0), \quad v_3 = (0,1,1), \quad (k \text{ parametro reale})$$

a) *Si stabilisca per quali valori di k i tre vettori costituiscono una base di $\mathbb{R}^3$.*
b) *Per i valori trovati al punto* a)*, si calcolino le coordinate del vettore $v = (-2,1,2)$ rispetto a tale base.*

Esercizio 8.18 (Esercizio 7.27)**.** *Si consideri il sottospazio $V = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ di $\mathbb{R}^5$ generato dai vettori*

$$v_1 = (-1,1,2,1,0), \; v_2 = (0,2,1,1,0), \; v_3 = (1,1,-1,0,0).$$

a) *Trovare una base di V.*
b) *Determinare le coordinate del vettore $v = (-2,6,6,4,0) \in V$ rispetto alla base trovata al punto* a)*.*

Esercizio 8.19 (Esercizio 7.28). *Sia V il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dai vettori:*

$$v_1 \equiv (2,1,1), \qquad v_2 \equiv (-1,1,2), \qquad v_3 \equiv (3,-2,-1), \qquad v_4 \equiv (4,-1,-2).$$

Determinare una base di V. Esprimere inoltre v_1, v_2, v_3 e v_4 come combinazione lineare degli elementi di tale base.

Esercizio 8.20 (Esercizio 7.29). *Sia V il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori:*

$$v_1 \equiv (2,1,2,1), \qquad v_2 \equiv (6,7,8,5)$$
$$v_3 \equiv (2k, k+8, 3k+3, 2), \qquad v_4 \equiv (0, 2k, 2k, 1).$$

Determinare una base di V al variare del parametro k. Esprimere inoltre v_1, v_2, v_3 e v_4 come combinazione lineare degli elementi di tale base.

Esercizio 8.21 (Esercizio 7.30). *Sia V il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori:*

$$v_1 \equiv (0, k-1, k^2-1, 3k-2), \qquad v_2 \equiv (1,3,0,3), \qquad v_3 \equiv (-1,-2,1,-1).$$

Determinare la dimensione e una base di V al variare del parametro reale k.

Esercizio 8.22 (Esercizio 7.31). *Sia W il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$:*

$$v_1 = (-1,1,-1,1), \qquad v_2 = (1,k,3,4), \qquad v_3 = (1,-1,k,1), \qquad v_4 = (0,0,1,k)$$

Si calcoli la dimensione di W al variare di $k \in \mathbb{R}$.

Esercizio 8.23 (Esercizio 7.32). *Si considerino i vettori di $\mathbb{R}^4$*

$$v_1 = (3,-1,2,0), \quad v_2 = (-6,2,-4,0), \quad v_3 = (-3,k,k-3,0)$$

a) *Si stabilisca per quali valori di k il vettore v_3 appartiene al sottospazio $W = \langle v_1, v_2 \rangle$ generato da v_1 e v_2.*
b) *Si trovi, al variare di k, una base di W e una base del sottospazio $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$.*

Esercizio 8.24 (Esercizio 7.33). *Si considerino i vettori di $\mathbb{R}^4$*

$$v_1 = (1,2,-1,3), \quad v_2 = (-2,-4,2,-6), \quad v_3 = (3,6,k-6,3k)$$

a) *Si stabilisca per quali valori di k il vettore v_3 appartiene al sottospazio $W = \langle v_1, v_2 \rangle$ generato da v_1 e v_2.*
b) *Si trovi, al variare di k, una base di W e una base del sottospazio $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$.*

Esercizio 8.25 (Esercizio 7.34). *Sia $V = \langle\ v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4\ \rangle$ con*

$$v_1 = (3,7,k+1,2k+2),\ v_2 = (2,2k+2,0,0),\ v_3 = (1,1,0,0),\ v_4 = (-3,-7,-1,2k)$$

a) *Si determini la dimensione di V al variare di $k \in \mathbb{R}$.*
b) *Si determini una base di V al variare di $k \in \mathbb{R}$.*

Esercizio 8.26 (Esercizio 7.35). *Determinare una base dei seguenti sottospazi W di $\mathbb{R}^3$:*

(1) $W = \langle (1,2,5), (-3,-6,-15) \rangle$
(2) $W = \langle (1,2,5), (-3,-6,-15), (2,1,0) \rangle$
(3) $W = \langle (-1,2,0), (0,1,-1), (1,-1,2) \rangle$

Esercizio 8.27 (Esercizio 7.36). *Sia $V = \langle\ v_1,\ v_2,\ v_3\ \rangle$ con*

$$v_1 = (k+3,\ k+3,\ 0), \qquad v_2 = (0,\ 3,\ k+2), \qquad v_3 = (0,\ 3k,\ k)$$

a) *Si stabilisca per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ lo spazio V coincide con $\mathbb{R}^3$.*
b) *Si determini la dimensione una base di V al variare di $k \in \mathbb{R}$.*

Esercizio 8.28 (Esercizio 7.37). *Sia V lo spazio vettoriale generato dai vettori $v_1 = (1,-2,4,0)$, $v_2 = (2,3,-1,1)$ e $v_3 = (0,-1,3,0)$:*

$$V = \langle v_1,\ v_2,\ v_3 \rangle$$

(1) *Determinare la dimensione dello spazio vettoriale V.*
(2) *Determinare se il vettore $v_4 = (3,1,3,1)$ appartiene a V. In caso positivo esprimere v_4 come combinazione lineare di v_1, v_2 e v_3.*
(3) *Determinare la dimensione dello spazio vettoriale $W = \langle v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4 \rangle$.*

Esercizio 8.29 (Esercizio 7.45). *Si considerino i vettori di* $\mathbb{R}^3$*:* $v_1 = (1,2,1)$, $v_2 = (1,1,-1)$, $v_3 = (1,1,3)$, $w_1 = (2,3,-1)$, $w_2 = (1,2,2)$, $w_3 = (1,1,-3)$.

a) *Si calcoli la dimensione dei sottospazi* $V = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$, $W = \langle w_1, w_2, w_3 \rangle$.
b) *Si trovi una base del sottospazio intersezione* $V \cap W$.

Esercizio 8.30 (Esercizio 7.46). *Si considerino i seguenti sottospazi di* $\mathbb{R}^3$*:*

$$U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + z = 0\}$$
$$V = \langle (1,0,1),\ (1,2,1),\ (1,0,1) \rangle$$

a) *Determinare una base e la dimensione di* U *e di* V.
b) *Determinare una base e la dimensione di* $U \cap V$.
b) *Determinare una base e la dimensione di* $U + V$.

Esercizio 8.31 (Esercizio 7.47). *Si considerino i seguenti sottospazi di* $\mathbb{R}^4$*:*

$$U = \{(0,1,1,0)a + (0,0,0,1)b \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$
$$V = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y = 0,\ z = 2x\}$$

a) *Determinare una base e la dimensione di* U *e di* V.
b) *Determinare una base e la dimensione di* $U \cap V$.
c) *Determinare una base e la dimensione di* $U + V$.

Esercizio 8.32 (Esercizio 7.49). *Siano* U *e* V *i sottospazi di* $\mathbb{R}^3$ *così definiti*

$$U = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + z = 0\right\}$$
$$V = \langle (1,-1,0),\ (1,1,-1) \rangle$$

a) *Determinare la dimensione e una base dei due sottospazi* U *e* V.
b) *Determinare la dimensione e una base dei due sottospazi* $U + V$ *e* $U \cap V$.

Esercizio 8.33 (Esercizio 7.50). *Siano* U *e* V *i sottospazi di* $\mathbb{R}^3$ *così definiti*

$$U = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + z = 0\right\}$$
$$V = \langle (2,-1,-2),\ (-3,4,3) \rangle$$

Dimostrare che $U = V$.

Esercizio 8.34 (Esercizio 7.51). *Si consideri il sottoinsieme* S *di* $\mathbb{R}^4$ *costituito dai vettori* v *della forma*

$$v = (a_1, a_1 - a_2 + 2a_3, 2a_1 - a_2, a_1 + 3a_2 + a_4)$$

dove a_1, a_2, a_3 *e* a_4 *sono parametri reali.*

a) S *è un sottospazio vettoriale di* $\mathbb{R}^4$*?*
b) *In caso di risposta affermativa ad a), trovare una base di* S.

Esercizio 8.35 (Esercizio 7.52). *Si consideri il sottoinsieme* S *di* $\mathbb{R}^4$ *costituito dai vettori* v *della forma*

$$v = (a_1 - a_2 + 2a_3, a_1, 2a_1 - a_2, a_1 + 3a_2 + a_4)$$

dove a_1, a_2, a_3 *e* a_4 *sono parametri reali.*

a) S *è un sottospazio vettoriale di* $\mathbb{R}^4$*?*
b) *In caso di risposta affermativa ad a), trovare una base di* S.

Esercizio 8.36 (Esercizio 7.53). *Si consideri il sottoinsieme* S *di* $\mathbb{R}^4$ *costituito dai vettori* v *della forma*

$$v = (a_1 - a_2 + 2a_3 + a_4,\ a_1,\ 2a_1 - a_2,\ a_1 + 3a_2)$$

dove a_1, a_2, a_3 *e* a_4 *sono parametri reali.*

a) S *è un sottospazio vettoriale di* $\mathbb{R}^4$*?*
b) *In caso di risposta affermativa ad a), trovare una base di* S.

Esercizio 8.37 (Esercizio 7.78). *Nello spazio vettoriale* $V = \mathbb{R}_2[x]$ *dei polinomi reali di grado non superiore a due, si considerino gli elementi*

$$p_1 = x - 1, \quad p_2 = x + 1, \quad p_3 = x^2 - x.$$

a) *Si mostri che l'insieme* $\mathcal{B} = (p_1,\ p_2,\ p_3)$ *è una base di* V.
b) *Si trovino le coordinate del polinomio costante* 1 *nella base* $\mathcal{B}$.

Esercizio 8.38. *Studiare al variare del parametro α il sistema lineare seguente:*
$$\begin{cases} x+y+z=\alpha \\ \alpha x+y+2z=1 \\ x+\alpha y+3z=1 \end{cases}$$
usando i metodi di Rouché -Capelli *e di* Cramer.

Esercizio 8.39. *Risolvere il seguente sistema utilizzando il metodo di Cramer:*
$$\begin{cases} 2x+3y-z=1 \\ x+4y+2z=2 \\ 3x-y-z=3 \end{cases}$$

Esercizio 8.40 (Abate 9.10)**.** *Risolvere il seguente sistema utilizzando il metodo di Cramer:*
$$\begin{cases} x-y+2z=2 \\ -x+2y+z=7 \\ 2x+y+2z=2 \end{cases}$$

Esercizio 8.41. *Risolvere il seguente sistema utilizzando il metodo di Cramer:*
$$\begin{cases} 2ix+z=-1 \\ ix+iz=i \\ x+y+z=2 \end{cases}$$

Esercizio 8.42. *Risolvere il seguente sistema utilizzando il metodo di Cramer:*
$$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3+x_4=0 \\ 2x_1+2x_2+3x_3+2x_4=0 \\ x_1+x_2+x_3+x_4=0 \end{cases}$$
Verificare che l'insieme delle soluzioni del sistema forma un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ e determinarne la dimensione.