CORSI DI LAUREA IN MATEMATICA E FISICA

FOGLIO DI ESERCIZI # 7– GEOMETRIA 1

Esercizio 7.1. *Determinare al variare di $k \in \mathbb{R}$ la dimensione dei due sottospazi di $\mathbb{R}^3$:*

$$U = \langle (1,1,k), (k+1,2,2), (2-k^2,1,k) \rangle$$

e

$$W = \langle (1,1,k), (k,1,2-k), (k+1,2,k+1) \rangle$$

Esercizio 7.2. *Calcolare al variare di $k \in \mathbb{R}$, la dimensione del sottospazio di $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$*

$$U = \langle kx - x^2, 1 - k + kx^2, k - (k-1)x - kx^2 \rangle$$

Esercizio 7.3. *Dimostrare che $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ è somma diretta dei sottospazi:*

$$U = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 | a_1 = a_2\} \qquad e \qquad V = \langle x - x^2 \rangle$$

Esercizio 7.4. *Calcolare la somma dei sottospazi $U = \langle (1,1,1) \rangle$ e $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x + y = x - z = 0\}$ di $\mathbb{R}^3$. Trattasi di somma diretta?*

Esercizio 7.5. *Sia $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \in \mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ allora $p'(x)$ denoterà la sua derivata prima rispetto ad x, ovvero $p'(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2$. Verificare che*

$$U = \{p(x) \in \mathbb{R}_{\leq 3}[x] | p(1) = p'(1) = 0\}$$

è un sottospazio di $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$, poi calcolarne la dimensione e una base.

Esercizio 7.6 (Abate 4.18)**.** *Siano $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Dimostare che se $|x_1| > |x_2|$ e $|y_2| > |y_1|$ allora (x, y) è una base di $\mathbb{R}^2$.*

Esercizio 7.7 (Abate 4.16)**.** *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita e W un suo sottospazio. Dimostrare che se U_1 e U_2 sono due sottospazi di V supplementari di W, allora $\dim U_1 = \dim U_2$.*

Esercizio 7.8 (Abate 4.19)**.** *Determinare uno spazio vettoriale reale V e tre suoi sottospazi W_1, W_2, W_3 tali che:*

$$W_1 \cap (W_2 + W_3) \neq (W_1 \cap W_2) + (W_1 \cap W_3).$$