CORSI DI LAUREA IN MATEMATICA E FISICA

FOGLIO DI ESERCIZI # 6– GEOMETRIA 1

Esercizio 6.1 (Esercizio 5.1). *Scrivere un vettore* $w \in \mathbb{R}^3$ *linearmente dipendente dal vettore* $v \equiv (-1,\ 9,\ 0)$.

Esercizio 6.2 (Esercizio 5.2). *Stabilire se i vettori* $v_1 \equiv (1,\ 5,\ 7)$ *e* $v_2 \equiv (1,\ 3,\ 4)$ *di* $\mathbb{R}^3$ *sono linearmente dipendenti.*

Esercizio 6.3 (Esercizio 5.3). *Scrivere un vettore* $w \in \mathbb{R}^4$ *linearmente dipendente dal vettore* $v \equiv (1,\ 3,\ -4,\ 2)$.

Esercizio 6.4. *Dati i vettori* $(1,1), (1,3), (2,-1) \in \mathbb{R}^2$, *stabilire se sono linearmente dipendenti e se è possibile scrivere il secondo vettore come combinazione lineare degli altri due.*

Esercizio 6.5. *Verificare che le matrici quadrate di ordine 3 triangolari superiori sono sottospazio vettoriale di* $M_3(\mathbb{R})$ *di dimensione 6.*

Esercizio 6.6. *Calcolare una base* $\mathcal{B}$ *del sottospazio (di* $\mathbb{R}^3$*)* $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x + y - z = 0\}$, *verificare che* $u = (1,1,2) \in U$ *e determinare le le componenti di* u *rispetto a* $\mathcal{B}$.

Esercizio 6.7.

a) *Determinare per quali valori del parametro reale* k *i seguenti vettori di* $\mathbb{R}^5$ *sono linearmente dipendenti:*

$$v_1 = (0,1,-1,0,1), \qquad v_2 = (1,0,1,0,k), \qquad v_3 = (-1,2,-3,0,0).$$

b) *Per i valori di* k *determinati in* a), *esprimere uno o più vettori come combinazione lineare dei rimanenti.*

Esercizio 6.8. *Dati i vettori di* $\mathbb{R}^3$:

$$v_1 \equiv (1,1,2),\ v_2 \equiv (2,4,6),\ v_3 \equiv (-1,2,5),\ v_4 \equiv (1,1,10)$$

determinare se v_4 *è combinazione lineare di* v_1, v_2 *e* v_3 *(determinare cioè se* v_4 *appartiene allo spazio vettoriale generato da* v_1, v_2 *e* v_3*). In caso positivo esprimere tale combinazione lineare (nella forma più generale possibile).*

Esercizio 6.9. *Dati i vettori di* $\mathbb{R}^3$:

$$v_1 \equiv (1,1,1),\ v_2 \equiv (-3,-2,-2),\ v_3 \equiv (2,2,k+4),\ v_4 \equiv (1,3,4)$$

determinare per quali valori del parametro reale k, v_4 *è combinazione lineare di* v_1, v_2 *e* v_3 *(determinare cioè se* v_4 *appartiene allo spazio vettoriale generato da* v_1, v_2 *e* v_3*). In caso positivo esprimere tale combinazione lineare (nella forma più generale possibile).*

Esercizio 6.10. *Ripetere l'esercizio precedente con i vettori*

$$v_1 \equiv (1,3,1),\ v_2 \equiv (2,k,-1),\ v_3 \equiv (-1,k-1,0),\ v_4 \equiv (1,15,7)$$

Esercizio 6.11. *Dati i vettori di* $\mathbb{R}^3$:

$$v_1 \equiv (1,2,1),\ v_2 \equiv (k-2,k-4,-k-2),\ v_3 \equiv (5,9,3)$$

determinare, se possibile, i valori del parametro k *per cui il vettore* v_3 *è combinazione lineare di* v_1, *e* v_2. *In caso positivo esprimere tale combinazione lineare (nella forma più generale possibile).*

Esercizio 6.12. *Si considerino le matrici*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ k & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & k \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} k & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Si dica per quali valori del parametro reale k *le matrici* A, B, C *sono linearmente indipendenti nello spazio* $M_2(\mathbb{R})$.

Esercizio 6.13. *Si considerino le matrici*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & k+1 \\ 4 & k-3 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2k-2 & 2k-1 \end{pmatrix}$$

a) *Si stabilisca per quale valore di $k \in \mathbb{R}$ le matrici A, B e C sono linearmente dipendenti.*
b) *Per il valore trovato in* a) *esprimere B come combinazione lineare di A e C.*

Esercizio 6.14. *Siano dati i polinomi*

$$p_1(x) = 1 + x, \qquad p_2(x) = 1 + 2x + x^2, \qquad p_3(x) = x - x^2.$$

Esprimere, se è possibile, $f(x) = x^2 - x + 2$ come combinazione lineare di $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_3(x)$.

Esercizio 6.15. *Dimostrare che lo spazio vettoriale $M_n(\mathbb{R})$ si decompone come somma diretta del sottospazio delle matrici simmetriche e del sottospazio delle matrici antisimmetriche. Calcolare la dimensione dei due sottospazi.*

Esercizio 6.16. *Calcolare la somma dei seguenti due sottospazi di $\mathbb{R}^3$:*

$$V = \langle (1,1,k) \rangle \qquad U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x + y + z = 0\}$$

al variare di $k \in \mathbb{R}$. Per quali valori di k, $U + V$ è somma diretta?

Esercizio 6.17. *Date le matrici*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

mostrare che A è invertibile e determinare la matrice $X \in M_3(\mathbb{R})$ tale che $AX + B = O$

Esercizio 6.18. *Data la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

verificare che $A^2 - A - 2I_3 = O$. Dedurre che A è invertibile e calcolare la sua inversa.

Esercizio 6.19. *Determinare, al variare del parametro reale $k \in \mathbb{R}$ il rango della matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k^2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k^3 \end{pmatrix}$$

Discutere e risolvere in $\mathbb{R}$ il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, dove $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ e $\mathbf{b} = (1, \mu, \mu^2, \mu^3)$ dove $k, \mu \in \mathbb{R}$.

Esercizio 6.20. *Determinare il rango delle seguenti matrici al variare del parametro $t \in \mathbb{R}$.*

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & t+1 & -1 \\ 0 & 0 & t-3 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & t+1 & -1 \\ 0 & 0 & t-3 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & t \\ 2 & 1 & 2 & t+1 \\ t & 0 & t & 0 \end{pmatrix}$$