CORSI DI LAUREA IN MATEMATICA E FISICA

FOGLIO DI ESERCIZI # 5– GEOMETRIA 1

Esercizio 5.1 (Esercizio 4.5). *Si risolva il seguente sistema di equazioni lineari:*

$$\begin{cases} x+y+2z & =1 \\ (k+2)x+2y+4z & =2 \\ (1+2k)x+3y+2z & =1+2k \end{cases}$$

al variare del parametro reale k.

Esercizio 5.2 (Esempio 3.18 Ab-dF). *Studiare la compatibilitá del seguente sistema di equazioni lineari:*

$$\begin{cases} x+\lambda y+\mu z & =0 \\ \lambda x-y+\lambda\mu z & =3 \\ x+\mu y-2z & =\lambda+2 \end{cases}$$

al variare di $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

Esercizio 5.3 (Esercizio 3.4 AB-dF). *Stabilire se la seguente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & 7 \\ 1 & 1 & 4 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

è invertibile (utilizzando l'eliminazione di Gauss).

Esercizio 5.4 (Esempio 3.4 AB-dF). *Determinare per quali $k \in \mathbb{C}$ la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & i & 1 \\ 3 & 1 & k & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 1 & k \end{pmatrix}$$

è invertibile.

Esercizio 5.5. *Sia dato l'insieme*

$$V = \{p(x) \in \mathbb{R}_{\leq 3}[x] \mid p(1) = 0 \ \}$$

Dimostrare che l'insieme V è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$.

Esercizio 5.6.

Mostrare che l'insieme

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} 3a & -a+b \\ a & -2a+b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

è un sottospazio vettoriale dello spazio delle matrici reali $M_2(\mathbb{R})$.

Esercizio 5.7. *Sia V Lo spazio vettoriale delle matrici reali 2×2. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} -8 & -7 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e sia S il sottinsieme di V costituito dalle matrici che commutano con A:*

$$S = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V \ : AM = MA \right\}$$

Mostrare che S è un sottospazio di V.

Esercizio 5.8. *Sia*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

e sia $S = \{M \in M_2(\mathbb{R}) \mid AM = MA = 0\}$. *Dimostrare che* S *è un sottospazio di* $M_2(\mathbb{R})$.

Esercizio 5.9. *Sia* $A \in M_n(\mathbb{K})$. *Definiamo l'applicazione* $\mathbb{K}[X] \ni P \longmapsto P(A) \in M_n(\mathbb{K})$ (*di valutazione in* A) *ponendo:*

$$P(A) := a_d A^d + \ldots + a_1 A + a_0 I_n \quad \text{se} \quad P(x) = a_d x^d + \ldots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{K}[x].$$

Provare le seguenti affermazioni.

(1) $(P+Q)(A) = P(A) + Q(A)$, $(kP)(A) = kP(A)$ *e* $(PQ)(A) = P(A)Q(A)$ *per ogni* $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ *e* $k \in \mathbb{K}$.

(2) *Se* $x \in \mathbb{K}^n$ *e* $\lambda \in \mathbb{K}$ *sono tali che* $Ax = \lambda x$, *allora* $P(A)x = P(\lambda)x$.

Esercizio 5.10. *Sia* $A \in M_n(\mathbb{K})$ *una matrice triangolare inferiore (rispettivamente superiore) avente tutti gli elementi diagonali* a_{ii} *diversi da zero. Si dimostri che* A *è invertibile e che l'inversa* A^{-1} *è ancora triangolare inferiore (rispettivamente superiore) con elemento diagonale di posto* (i,i) *uguale a* a_{ii}^{-1}.

Matrici a blocchi. Sia $\mathbb{K}$ un campo, siano $m, n \in \mathbb{N}^* := \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$. Spesso è utile *partizionare a blocchi* la matrice A, cioè scrivere A come segue. Consideriamo $m_1, \ldots, m_p, n_1, \ldots, n_q \in \mathbb{N}^*$ tali che $m_1 + m_2 + \ldots + m_p = m$[1] e $n_1 + n_2 + \ldots + n_q = n$ per qualche $p, q \in \mathbb{N}^*$. Poniamo

$$A = (A_{ij})_{i,j} = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1j} & \cdots & A_{1q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{i1} & \cdots & A_{ij} & \cdots & A_{iq} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{p1} & \cdots & A_{pj} & \cdots & A_{pq} \end{pmatrix},$$

ove $A_{ij} \in M_{m_i, n_j}(\mathbb{K})$ per ogni $i \in \{1, \ldots, p\}$ e $j \in \{1, \ldots, q\}$. Per evidenziare il fatto che gli "elementi" A_{ij} della precedente rappresentazione di A sono matrici, si scrive anche

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} A_{11} & \cdots & A_{1j} & \cdots & A_{1q} \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline A_{i1} & \cdots & A_{ij} & \cdots & A_{iq} \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline A_{p1} & \cdots & A_{pj} & \cdots & A_{pq} \end{array}\right).$$

Esercizio 5.11. *Siano* $A \in M_2(\mathbb{R})$, $B \in M_{2,3}(\mathbb{R})$ *e* $C \in M_{1,2}(\mathbb{R})$ *le matrici definite ponendo*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si scriva esplicitamente la seguente matrice a blocchi $E \in M_{3,5}(\mathbb{K})$*:*

$$E = \left(\begin{array}{c|c} A^T A & B \\ \hline CA & CB \end{array}\right).$$

Esercizio 5.12. *Siano* $m, n, \ell \in \mathbb{N}^*$ *e siano* $m_1 + \ldots + m_p = m$, $n_1 + \ldots + n_q = n$ *e* $\ell_1 + \ldots + \ell_r = \ell$ *partizioni di* m, n *e* ℓ *rispettivamente. Consideriamo le matrici a blocchi* $A = (A_{ij})_{i,j} \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ *e* $B = (B_{jk})_{j,k} \in M_{n,\ell}(\mathbb{K})$ *con* $A_{ij} \in M_{m_i,n_j}(\mathbb{K})$ *e* $B_{jk} \in M_{n_j,\ell_k}(\mathbb{K})$ *per ogni* $i \in \{1, \ldots, p\}$, $j \in \{1, \ldots, q\}$ *e* $k \in \{1, \ldots, r\}$. *Provare che* AB *è uguale alla matrice a blocchi* $(C_{ik})_{i,k}$, *ove* $C_{ij} = \sum_{j=1}^{q} A_{ij} B_{jk} \in M_{m_i,\ell_k}(\mathbb{K})$ *per ogni* $i \in \{1, \ldots, p\}$ *e* $k \in \{1, \ldots, r\}$*:*

[1] Una decomposizione di m in somma di interi positivi si dice *partizione di* m.

$$AB = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1j} & \cdots & A_{1q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{i1} & \cdots & A_{ij} & \cdots & A_{iq} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{p1} & \cdots & A_{pj} & \cdots & A_{pq} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1k} & \cdots & B_{1r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ B_{j1} & \cdots & B_{jk} & \cdots & B_{jr} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ B_{q1} & \cdots & B_{qk} & \cdots & B_{qr} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & \sum_{j=1}^{q} A_{ij}B_{jk} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}.$$

In altre parole, AB si può calcolare effettuando il prodotto "riga per colonna" a blocchi.

Esercizio 5.13. *Siano $m, n \in \mathbb{N}^*$. Definiamo il* prodotto tensore[2] $\otimes : M_m(\mathbb{K}) \times M_n(\mathbb{K}) \longrightarrow M_{mn}(\mathbb{K})$ *tra matrici quadrate di ordine m e n ponendo:*

$$A \otimes B := \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} a_{11}B & \cdots & a_{1j}B & \cdots & a_{1m}B \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline a_{i1}B & \cdots & a_{ij}B & \cdots & a_{im}B \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline a_{m1}B & \cdots & a_{mj}B & \cdots & a_{mm}B \end{array}\right), \quad \textit{ove } A = (a_{ij})_{i,j}.$$

Siano $A, C \in M_m(\mathbb{K})$, $B, D \in M_n(\mathbb{K})$ e $k \in \mathbb{K}$. Verificare che valgono le seguenti affermazioni.

(1) $A \otimes (B + D) = A \otimes B + A \otimes D$ *e* $(A + C) \otimes B = A \otimes B + C \otimes B$.
(2) $(kA) \otimes B = A \otimes (kB) = k(A \otimes B)$.
(3) $(A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T$.
(4) $I_m \otimes I_n = I_{mn}$.
(5) $(A \otimes B)(C \otimes D) = (AB) \otimes (CD)$.
(5′) $A \otimes B$ *è invertibile se e soltanto se A e B lo sono. Inoltre in questo caso, si ha:*

$$(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}.$$

Esercizio 5.14. *Provare che il prodotto tensore tra matrici definito nell'esercizio precedente è associativo:*

$$(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C)$$

per ogni $A \in M_m(\mathbb{K})$, $B \in M_n(\mathbb{K})$ e $C \in M_\ell(\mathbb{K})$.

Sottomatrici. Sia $A = (a_{ij})_{i,j} \in M_{m,n}(\mathbb{K})$. Una *sottomatrice* di A è una matrice ottenuta estraendo alcune righe ed alcune da A. Più precisamente, dati $i_1, \ldots, i_p, j_1, \ldots, j_q \in \mathbb{N}^*$ tali che $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leq m$ e $1 \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_q \leq n$, la sottomatrice di A ottenuta estraendo le righe $i_1, \ldots, i_p$ e le colonne $j_1, \ldots, j_q$ si indica con $A(i_1, \ldots, i_p \,|\, j_1, \ldots, j_q)$ e si definisce ponendo

$$A(i_1, \ldots, i_p \,|\, j_1, \ldots, j_q) := (a_{i_\alpha, j_\beta})_{\alpha,\beta},$$

con $\alpha \in \{1, \ldots, p\}$ e $\beta \in \{1, \ldots, q\}$. Se $p = q$ e $i_\alpha = j_\alpha$ per ogni $\alpha \in \{1, \ldots, p\}$, allora $A(i_1, \ldots, i_p \,|\, j_1, \ldots, j_p)$ si dice *sottomatrice principale* di A di ordine p. Se in aggiunta $i_\alpha = j_\alpha = \alpha$ per ogni $\alpha \in \{1, \ldots, p\}$, allora $A(i_1, \ldots, i_p \,|\, j_1, \ldots, j_p) = A(1, 2, \ldots, p \,|\, 1, 2, \ldots, p)$ si dice *sottomatrice principale di testa* di A di ordine p.

Esercizio 5.15. *Sia A la seguente matrice in $M_{4,5}(\mathbb{C})$:*

$$A := \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 & -3 & -\mathrm{i} & -7 \\ 0 & 0 & 2\mathrm{i} & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & \mathrm{i} & -\mathrm{i} & 1-\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

Si scrivano: la sottomatrice principale di testa A_1 di A di ordine 3, la sottomatrice principale (non di testa) A_2 di A di ordine 4 e la sottomatrice $A_3 := A(1, 2, 4 \,|\, 2, 5)$ di A.

[2] "$\otimes$" viene anche detto *prodotto di Kronecker*.

Soluzione:

Ecco le sottomatrici richieste:

$$A_1 := \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2\mathrm{i} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 := \begin{pmatrix} 0 & -3 & -\mathrm{i} & -7 \\ 0 & 2\mathrm{i} & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & \mathrm{i} & -\mathrm{i} & 1-\mathrm{i} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -7 \\ 0 & 4 \\ -1 & 1-\mathrm{i} \end{pmatrix}. \ \square$$

Esercizio 5.16 (Fattorizzazione LU)**.** *Sia A una matrice in $M_n(\mathbb{K})$ avente tutte le sottomatrici principali di testa invertibili. Si dimostri che esistono, e sono uniche, una matrice unitriangolare inferiore $L \in M_n(\mathbb{K})$ (cioè L è triangolare inferiore e tutti gli elementi diagonali sono uguali a 1) ed una matrice tringolare superiore U tali che $A = LU$.*[3]

[3] Questa fattorizzazione è una delle tecniche utilizzate in Analisi Numerica per la risoluzione "veloce" di sistemi lineari quadrati: per risolvere $Ax = b$, si scrive $A = LU$ e si risolvono successivamente i sistemi lineari $Ly = b$ in y e $Ux = y$ in x. La fattorizzazione LU può essere generalizzata ad ogni matrice in $M_n(\mathbb{K})$.