CORSI DI LAUREA IN MATEMATICA E FISICA

FOGLIO DI ESERCIZI # 4– GEOMETRIA 1

Esercizio 4.1. *Sia V uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$ e sia $\{V_i\}_{i\in I}$ una famiglia di sottospazi vettoriali di V. Provare che l'intersezione $\bigcap_{i\in I} V_i$ è un sottospazio vettoriale di V. È vera la stessa affermazione per l'unione $\bigcup_{i\in I} V_i$?*

Esercizio 4.2 (Esercizio 3.2)**.** *Sia $\mathbb{R}[X]$ l'insieme dei polinomi in una indeterminata X a coefficienti in $\mathbb{R}$.*

- *Verificare che $\mathbb{R}[X]$ è un gruppo rispetto alla somma tra polinomi.*
- *Verificare che $\mathbb{R}[X]$ non è un gruppo rispetto al prodotto tra polinomi.*
- *Verificare che $\mathbb{R}[X]$ è un anello commutativo con unità rispetto alla somma e al prodotto tra polinomi. È anche un campo con tali operazioni?*
- *Verificare che $\mathbb{R}[X]$ è uno spazio vettoriale reale con la somma tra polinomi e con il prodotto per scalari dato dal prodotto tra polinomi, ove i numeri reali sono identificati con i polinomi costanti.*

Esercizio 4.3 (Esercizio 3.3)**.** *L'insieme*

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$$

è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$? Perchè?

Esercizio 4.4 (Esercizio 3.4)**.** *Ripetere l'esercizio precedente con l'insieme*

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 1\}.$$

Esercizio 4.5 (Esercizio 3.6)**.** *Sia $n \in \mathbb{N}$ e sia $\mathbb{R}_{\leq n}[X]$ il sottoinsieme dei polinomi in $\mathbb{R}[x]$ aventi grado $\leq n$. Verificare che $\mathbb{R}_{\leq n}[x]$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}[x]$.*

Esercizio 4.6 (Esercizio 3.8)**.** *Sia G il sottoinsieme di $\mathbb{R}[X]$ definito ponendo*

$$G := \{aX^2 + a \in \mathbb{R}[X] \mid a \in \mathbb{Z}\}$$

a) *Mostrare che G è un gruppo rispetto alla somma di polinomi.*
b) *Dire se G è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}[x]$, motivando la risposta.*

Esercizio 4.7. *Sia n un numero naturale positivo e sia $A \in M_n(\mathbb{K})$, ove $\mathbb{K}$ è un campo fissato. Definiamo i sottoinsiemi $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ di $M_n(\mathbb{K})$ ponendo*

- $\mathcal{A} := \{X \in M_n(\mathbb{K}) \mid \operatorname{tr}(X^T X) = 0\}$,
- $\mathcal{B} := \{X \in M_n(\mathbb{K}) \mid \operatorname{tr}(XA - A^2X) = 0\}$,
- $\mathcal{C} := \{X \in M_n(\mathbb{K}) \mid \operatorname{tr}(X)A - \operatorname{tr}(A)X = 0\}$.

Dire quale dei precedenti insiemi è un sottospazio vettoriale di $M_n(\mathbb{K})$.

Esercizio 4.8 (Esercizio 4.9)**.** *Sia*

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + (k+1)z = k, \quad 2x + y + z = 0\}.$$

a) *Stabilire per quali valori di k l'insieme S è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.*
b) *Per i valori di k trovati al punto precedente esplicitare S.*

Esercizio 4.9 (Esercizio 4.10)**.** *Sia*

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + kz = k - 1,\ x - 2y + z = 0,\ -2x + 4ky - 2z = 0\}$$

a) *Stabilire per quali valori di k l'insieme S è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.*
b) *Per i valori di k trovati al punto precedente esplicitare S.*

Esercizio 4.10 (Esercizio 4.11). *Sia S il sottoinsieme di $\mathbb{R}^5$ definito ponendo*

$$S := \left\{ x \in \mathbb{R}^5 \mid x_1 - x_2 + 2x_5 = k,\ x_1 + x_3 + kx_4 = 0 \right\}.$$

a) *Per quali valori del parametro reale k l'insieme S è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^5$?*
b) *Per i valori determinati al punto* a) *esplicitare S.*

Esercizio 4.11 (Esercizio 6.4). *Calcolare l'inversa delle matrici (invertibili)*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

utilizzando il metodo della riduzione a gradini.

Esercizio 4.12 (Sernesi, esercizio 3 pag 48). *Calcolare $3A^{-1} - AB^{-2}$, dove*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 4.13 (Da Sernesi Esercizio 4 pag 49). *Calcolare in $\mathbb{C}$ l'inversa, se esiste, delle seguenti matrici:*

$$A = \begin{pmatrix} 2i & 0 & 1 \\ 0 & 0 & i \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio 4.14 (Sernesi- Esercizio 5a pag 49). *Risolvere il seguente sistema con il metodo dell'inversa.*

$$\begin{cases} x + y - \dfrac{z}{2} = 1 \\ 12y - z = 12 \\ x + 3y = 3 \end{cases}$$