CORSI DI LAUREA IN MATEMATICA E FISICA

FOGLIO DI ESERCIZI # 2– GEOMETRIA 1 2012-2013

Nota: Il numero che compare tra parentesi in alcuni esercizi è il riferimento all'eserciziario della Dottoressa Claretta Carrara disponibile alla pagina web www.science.unitn.it/∼carrara, da cui sono tratti quegli esercizi e le relative note.

Esercizio 2.1 (Esercizio 1.1)**.** *Date le matrici*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

e dati $\lambda = 5$, $\mu = 2$, *calcolare* $A + B$, $B - A$, $\lambda A + \mu B$.

Esercizio 2.2. *Scrivere, se possibile, la matrice*

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

come combinazione lineare di

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 2.3. *Scrivere, se possibile, la matrice*

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

come combinazione lineare di

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 2.4 (Esercizio 1.15)**.** *Date le matrici*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

stabilire se esistono valori di k *per cui* C *è combinazione lineare di* A, B. *In caso positivo esprimere tale combinazione lineare.*

Esercizio 2.5 (Esercizio 1.5)**.** *Date le matrici*

$$A = \begin{pmatrix} -2 & \frac{1}{2} & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

calcolare $3A - 2B$ *e* AB^T.

Esercizio 2.6 (Esercizio 1.4)**.** *Date le matrici*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

calcolare i prodotti AI_4 *e* I_4A^T.

Esercizio 2.7 (Esercizio 1.2)**.** *Per ognuna delle seguenti coppie di matrici* A, B *e scalari* λ, $\mu \in \mathbf{R}$, *calcolare* $A + B$, $B - A$, $\lambda A + \mu B$, AB, BA, A^2*:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \qquad \lambda = \frac{1}{2},\ \mu = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -1 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda = 2,\ \mu = -1$$

Esercizio 2.8 (Esercizio 1.3). *Date le seguenti matrici:*

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 & -3 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}; \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 5 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}; \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 5 & -1 \end{pmatrix};$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 10 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}; \qquad A_5 = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ -4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad A_6 = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -8 & 5 & 3 \end{pmatrix};$$

calcolare, quando possibile, i prodotti $A_i \cdot A_j$ *per* $i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Esercizio 2.9 (Esercizio 1.6). *Calcolare la potenza* A^3 *della matrice*

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 2.10 (Esercizio 1.7). *Data la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

calcolare, se esiste, l'inversa di A *(cioè determinare se esiste la matrice* B *tale che* $AB = BA = I$*).*

Esercizio 2.11 (Esercizio 1.8). *Date le seguenti matrici* A*, calcolare, se esiste, l'inversa di* A *(cioè determinare se esiste la matrice* B *tale che* $AB = BA = I$*).*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Esercizio 2.12 (Esercizio 1.9). *Date le matrici*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

calcolare AB, BA, BC *e* CB.

Esercizio 2.13 (Esercizio 1.10). *Si consideri il seguente insieme (matrici triangolari superiori di* $M_{2\times 2}(\mathbf{R})$*)*

$$I = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbf{R} \right\}$$

Si verifichi che I *è chiuso rispetto al prodotto e alla somma di matrici, ovvero che presi due elementi di* I *anche il loro prodotto e la loro somma sono elementi di* I.

Esercizio 2.14 (Esercizio 1.11). *Mostrare attraverso un esempio che esistono matrici* A, B *non nulle tali che* $AB = 0$.

Esercizio 2.15 (Esercizio 1.12). *Sia*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e B *una matrice tale che* $AB = BA$. *Si dimostri che*

$$B = \lambda I_2 + \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dove $\lambda,\ x \in \mathbf{R}$.

Esercizio 2.16 (Esercizio 1.18). *Si risolva il sistema* $Ax = b$ *dove*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Esercizio 2.17 (Esercizio 1.19). *Siano* A *e* B *matrici* 3×3 *tali che*

$$AB = BA \qquad \forall B \in M_{3\times 3}$$

Si dimostri che deve necessariamente essere:

$$A = \lambda I_3 \qquad \text{per qualche } \lambda \in \mathbf{R}$$