CORSI DI LAUREA IN MATEMATICA E FISICA

FOGLIO DI ESERCIZI # 12– GEOMETRIA 1

Esercizio 12.1. *Si dica se la matrice $A \in M_3(\mathbb{R})$ definita ponendo*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$ [1]

è diagonalizzabile (via similitudine) e, in caso affermativo, si calcoli una base di $\mathbb{R}^3$ diagonalizzante per l'operatore lineare $L_A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ associato ad A [2] *e una matrice $M \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ tale che $M^{-1}AM$ è diagonale.*

Si ripeta lo stesso esercizio con le seguenti matrici B e C al posto della matrice A:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \quad e \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

SOLUZIONE:

Poiché $P_A(T) = -(T-1)^2(T-2)$, si ha che $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2\}$ con $\lambda_1 = 1$, $\mathrm{ma}(\lambda_1, A) = 2$ e $\lambda_2 = 2$, $\mathrm{ma}(\lambda_2, A) = 1$. Si osservi che A è diagonalizzabile se e soltanto se $\mathrm{mg}(\lambda_1, A) = 2 = \mathrm{ma}(\lambda_1, A)$. Infatti l'uguaglianza $\mathrm{mg}(\lambda_2, A) = 1 = \mathrm{ma}(\lambda_2, A)$ è certamente verificata, essendo $1 \leq \mathrm{mg}(\lambda_2, A) \leq \mathrm{ma}(\lambda_2, A) = 1$.

Calcoliamo $\mathrm{mg}(\lambda_1, A)$. Osserviamo che

$$A - \lambda_1 I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

e quindi $\mathrm{mg}(\lambda_1, A) = 3 - \mathrm{rk}(A - \lambda_1 I_3) = 3 - 1 = 2$. Segue che la matrice è diagonalizzabile.

Calcoliamo una base diagonalizzante per A. Cominciamo col calcolare una base dell'autospazio $\mathbb{V}_{\lambda_1}(A)$ di A relativo a λ_1:

$$\mathbb{V}_{\lambda_1}(A) : (A - \lambda_1 I_3)X = 0 \text{ con } X = (x, y, z)^T \Longleftrightarrow -x + y - z = 0 \Longleftrightarrow x = y - z.$$

Dunque, si ha:

$$\mathbb{V}_{\lambda_1}(A) = \left\{ \left(\begin{array}{c} t-s \\ t \\ s \end{array} \right) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, t, s \in \mathbb{R} \right\} = < v_1, v_2 >, \text{ dove } v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ e } v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Risolvendo il sistema $(A - \lambda_2 I_3)X = 0$ otteniamo:

$$\mathbb{V}_{\lambda_2}(A) = < v_3 >, \text{ dove } v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Segue che $\mathcal{C} := (v_1, v_2, v_3)$ è una base di $\mathbb{R}^3$ diagonalizzante per A. Inoltre, se C_3 denota la base canonica di $\mathbb{R}^3$, allora la matrice $M := \mathcal{M}_{\mathsf{C}_3,\mathcal{C}}(\mathbf{1}_{\mathbb{R}^3})$ ha per colonne i vettori v_1, v_2 e v_3, e vale:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \mathcal{M}_{\mathcal{C}}(L_A) = \left(\mathcal{M}_{\mathsf{C}_3,\mathcal{C}}(\mathbf{1}_{\mathbb{R}^3})\right)^{-1} \mathcal{M}_{\mathsf{C}_3}(L_A) \mathcal{M}_{\mathsf{C}_3,\mathcal{C}}(\mathbf{1}_{\mathbb{R}^3}) = M^{-1}AM.$$

Studiamo la diagonalizzabilità di B e C. Valgono:

- $P_B(\lambda) = -(\lambda+1)^3 \Longrightarrow \sigma(B) = \{\lambda_3\}$ con $\lambda_3 = -1$;
- $\mathrm{ma}(\lambda_1, B) = 3$, $\mathrm{mg}(\lambda_3, B) = 3 - \mathrm{rk}(B - \lambda_3 I_3) = 3 - 2 = 1$;
- poiché $\mathrm{ma}(\lambda_3, B) \neq \mathrm{mg}(\lambda_3, B)$, B non è diagonalizzabile

e

- $P_C(\lambda) = -(\lambda-1)^3 \Longrightarrow \sigma(C) = \{\lambda_1\}$ con $\lambda_1 = 1$;
- $\mathrm{ma}(\lambda_1, C) = 3$, $\mathrm{mg}(\lambda_1, C) = 3 - \mathrm{rk}(C - \lambda_1 I_3) = 3 - 1 = 2$;
- poiché $\mathrm{ma}(\lambda_1, C) \neq \mathrm{mg}(\lambda_1, C)$, C non è diagonalizzabile.

[1] Si tratta della matrice considerata nell'Esercizio 9, p. 190 del Sernesi.

[2] Si ricordi che L_A è l'operatore definito ponendo $L_A(x) := Ax$ per ogni $x \in \mathbb{R}^3$.

■

Esercizio 12.2. *Si dica se la matrice $A \in M_3(\mathbb{C})$ definita ponendo*

$$A = \begin{pmatrix} 2\mathrm{i} & -\mathrm{i} & 2 \\ 2\mathrm{i} & -\mathrm{i} & 2 \\ 1 & -1 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile (via similitudine) e, in caso affermativo, si calcoli una base di $\mathbb{C}^3$ diagonalizzante per l'operatore lineare $L_A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ associato ad A e una matrice $M \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ tale che $M^{-1}AM$ è diagonale.

SOLUZIONE:

Poiché $P_A(T) = -T(T-\mathrm{i})(T+\mathrm{i})$, A è diagonalizzabile in quanto possiede tre autovalori a due a due distinti, cioé $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \mathrm{i}$ e $\lambda_3 = -\mathrm{i}$. Inoltre si ha:

- $\mathbb{V}_{\lambda_1}(A) = \mathrm{Ker}(A - \lambda_1 I_3) =< v_1 >$ con $v_1 := (\mathrm{i}, 0, 1)^T$;
- $\mathbb{V}_{\lambda_2}(A) = \mathrm{Ker}(A - \lambda_2 I_3) =< v_2 >$ con $v_2 := (1, 1, 0)^T$;
- $\mathbb{V}_{\lambda_3}(A) = \mathrm{Ker}(A - \lambda_3 I_3) =< v_3 >$ con $v_3 := (\mathrm{i}, \mathrm{i}, 1)^T$.

Dunque $\mathcal{C} := (v_1, v_2, v_3)$ è una base di $\mathbb{C}^3$ diagonalizzante per A e la matrice $M \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ avente v_1, v_2, v_3 come colonne ha la proprietà richiesta. Infatti, se C_3 denota la base canonica di $\mathbb{C}^3$, allora

$$M = \mathcal{M}_{\mathsf{C}_3,\mathcal{C}}(\mathbf{1}_{\mathbb{C}^3}) = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 1 & \mathrm{i} \\ 0 & 1 & \mathrm{i} \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e quindi

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix} = \mathcal{M}_{\mathcal{C}}(L_A) = \left(\mathcal{M}_{\mathsf{C}_3,\mathcal{C}}(\mathbf{1}_{\mathbb{C}^3})\right)^{-1} \mathcal{M}_{\mathsf{C}_3}(L_A) \mathcal{M}_{\mathsf{C}_3,\mathcal{C}}(\mathbf{1}_{\mathbb{C}^3}) = M^{-1}AM.$$

■

Esercizio 12.3. *Si dica se la matrice $A \in M_4(\mathbb{R})$ definita ponendo*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile (via similitudine) e, in caso affermativo, si calcoli una base di $\mathbb{R}^4$ diagonalizzante per l'operatore lineare $L_A : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ associato ad A e una matrice $M \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ tale che $M^{-1}AM$ è diagonale.

SOLUZIONE:

Il polinomio caratteristico di A è uguale a $(T-1)^2(T+1)^2$. Segue che $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2\}$ con $\lambda_1 = 1$, $\mathrm{ma}(\lambda_1, A) = 2$ e $\lambda_2 = -1$, $\mathrm{ma}(\lambda_2, A) = 2$. Poiché $\mathrm{rk}(A - \lambda_1 I_4) = 2$ e $\mathrm{rk}(A - \lambda_2 I_4) = 2$, si ha che $\mathrm{mg}(\lambda_1, A) = 4 - 2 = 2$, $\mathrm{mg}(\lambda_2, A) = 4 - 2 = 2$ e quindi A è diagonalizzabile. Inoltre, valgono:

$$\mathbb{V}_{\lambda_1}(A) : \ (A - \lambda_1 I_4)X = 0 \ \text{ con } X = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 + x_2 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 + x_4 \\ x_3 = -x_4 \end{cases}$$

e

$$\mathbb{V}_{\lambda_2}(A) : \ (A - \lambda_2 I_4)X = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 + x_4 \\ x_3 = -x_3 - x_4 \end{cases}.$$

Segue che

$$\mathbb{V}_{\lambda_1}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} -s+t \\ s \\ -t \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \ \middle| \ t, s \in \mathbb{R} \right\} =< v_1, v_2 >, \ \text{dove } v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ e } v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

e

$$\mathbb{V}_{\lambda_2}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} t+s \\ -t-s \\ t \\ s \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, t,s \in \mathbb{R} \right\} =< v_3, v_4 >, \text{ dove } v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ e } v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dunque, $\mathcal{C} := (v_1, v_2, v_3, v_4)$ è una base di $\mathbb{R}^4$ diagonalizzante per A. Inoltre, se $\mathtt{C}_4$ denota la base canonica di $\mathbb{R}^4$, allora la matrice $M := \mathcal{M}_{\mathtt{C}_4,\mathcal{C}}(\mathbf{1}_{\mathbb{R}^4})$ ha per colonne i vettori v_1, v_2, v_3 e v_4, e vale:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \mathcal{M}_{\mathcal{C}}(L_A) = \left(\mathcal{M}_{\mathtt{C}_4,\mathcal{C}}(\mathbf{1}_{\mathbb{R}^4})\right)^{-1} \mathcal{M}_{\mathtt{C}_4}(L_A) \mathcal{M}_{\mathtt{C}_4,\mathcal{C}}(\mathbf{1}_{\mathbb{R}^4}) = M^{-1}AM.$$

■

Esercizio 12.4. *Si dica per quali valori del parametro $t \in \mathbb{R}$ la seguente matrice*

$$A_t = \begin{pmatrix} t+1 & t & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & t \\ -t & -t & 1-t & 0 \\ t & t & t & 1 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$$

è diagonalizzabile (via similitudine).

Soluzione:

Sia $t \in \mathbb{R}$. Sviluppando $\det(A_t - TI_4)$ lungo la secondo riga, otteniamo:

$$\begin{aligned} P_{A_t}(T) =& (1-T) \begin{vmatrix} t+1-T & t & 0 \\ -t & 1-t-T & 0 \\ t & t & 1-T \end{vmatrix} + t \begin{vmatrix} t+1-T & t & t \\ -t & -t & 1-t-T \\ t & t & t \end{vmatrix} = \\ \overset{(*)}{=}& (1-T)^2((1-T-t)(1-T+t)+t^2) + t \begin{vmatrix} t+1-T & t & t \\ 0 & 0 & 1-T \\ t & t & t \end{vmatrix} = \\ =& (1-T)^4 - t^2(1-T)^2 = (1-T)^2(1-T-t)(1-T+t). \end{aligned}$$

Per ottenere l'uguaglianza $(*)$ abbiamo sostituito la matrice

$$\begin{pmatrix} t+1-T & t & t \\ -t & -t & 1-t-T \\ t & t & t \end{pmatrix}$$

con quella ottenuta sommando la terza riga alla seconda: il determinante non cambia.

Dall'espressione di P_{A_t}, segue che:

- se $t = 0$, allora $\sigma(A_t) = \{\lambda_1\}$ con $\lambda_1 = 1$ e $\mathrm{ma}(\lambda_1, A_t) = 4$;
- se $t \neq 0$, allora $\sigma(A_t) = \{\lambda_1, \lambda_2(t), \lambda_3(t)\}$ con $\lambda_2(t) = 1-t$, $\lambda_3(t) = 1+t$ e $\mathrm{ma}(\lambda_1, A_t) = 2$, $\mathrm{ma}(\lambda_2(t), A_t) = 1$ e $\mathrm{ma}(\lambda_3(t), A_t) = 1$.

Nel caso in cui $t = 0$, si ha che $A_t = I_4$ e quindi A_t è diagonalizzabile.

Supponiamo che $t \neq 0$. Osserviamo che $\mathrm{mg}(\lambda_2(t), A_t) = 1 = \mathrm{ma}(\lambda_2(t), A_t)$ in quanto $1 \leq \mathrm{mg}(\lambda_2(t), A_t) \leq \mathrm{ma}(\lambda_2(t), A_t) = 1$. Similmente, si ha che $\mathrm{mg}(\lambda_3(t), A_t) = 1 = \mathrm{ma}(\lambda_3(t), A_t)$. Calcoliamo $\mathrm{mg}(\lambda_1, A_t)$. Vale:

$$\mathrm{rk}(A_t - \lambda_1 I_4) = \mathrm{rk}\left(\begin{pmatrix} t & t & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t \\ -t & -t & -t & 0 \\ t & t & t & 0 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{rk}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 2$$

da cui

$$\mathrm{mg}(\lambda_1, A_t) = 4 - \mathrm{rk}(A_t - \lambda_1 I_4) = 2.$$

Segue che A_t è diagonalizzabile anche se $t \neq 0$.

In conclusione, A_t è diagonalizzabile per ogni $t \in \mathbb{R}$. ■

Esercizio 12.5 (Diagonalizzazione simultanea). *Siano A e B due matrici in $M_n(\mathbb{K})$ diagonalizzabili. Si dimostri che le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(i) *A e B sono simultaneamente diagonalizzabili, cioè esiste $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tale che le matrici $M^{-1}AM$ e $M^{-1}BM$ sono diagonali.*

(ii) $AB = BA$.

SOLUZIONE:
Se esiste $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tale che $D_A := M^{-1}AM$ e $D_B := M^{-1}BM$ sono diagonali, allora si ha:

$$AB = (MD_AM^{-1})(MD_BM^{-1}) = MD_AD_BM^{-1} = MD_BD_AM^{-1} = (MD_BM^{-1})(MD_AM^{-1}) = BA.$$

Supponiamo ora che $AB = BA$. Dobbiamo provare che esiste una base di $\mathbb{K}^n$ formata di autovettori comuni di A e di B. Poiché A è diagonalizzabile, A ha tutti gli autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ in $\mathbb{K}$ e vale:

(1) $$\mathbb{K}^n = \mathbb{V}_{\lambda_1}(A) \oplus \ldots \oplus \mathbb{V}_{\lambda_k}(A).$$

Proviamo che ogni autospazio $\mathbb{V}_{\lambda_j}(A)$ è L_B-invariante, cioé $Bv \in \mathbb{V}_{\lambda_j}(A)$ per ogni $v \in \mathbb{V}_{\lambda_j}(A)$. Sia $j \in \{1, \dots, k\}$ e sia $v \in \mathbb{V}_{\lambda_j}(A)$. Vale:

$$A(Bv) = B(Av) = B(\lambda_j v) = \lambda_j(Bv),$$

ovvero $Bv \in \mathbb{V}_{\lambda_j}(A)$ come desiderato.

Sia $\mathcal{B} = (w_1, \dots, w_n)$ una base di $\mathbb{K}^n$ diagonalizzante per B, cioé costituita da autovettori di B (che esiste per ipotesi). Scegliamo $\ell \in \{1, \dots, n\}$ e denotiamo con $\mu_\ell \in \mathbb{K}$ l'autovalore di B relativo a w_ℓ. Grazie a (1), esistono, e sono unici, $x_{\ell,1} \in \mathbb{V}_{\lambda_1}(A), \dots, x_{\ell,k} \in \mathbb{V}_{\lambda_k}(A)$ tali che

$$w_\ell = x_{\ell,1} + \ldots + x_{\ell,k}.$$

Si osservi che almeno un $x_{\ell,j} \neq 0$ perché $w_\ell \neq 0$ (essendo un autovettore di B). A meno di riordinare gli indici possiamo supporre che $x_{\ell,1} \neq 0, \dots, x_{\ell,k_\ell} \neq 0$, mentre $x_{\ell,k_\ell+1} = \ldots = x_{\ell,k} = 0$ per qualche $k_\ell \in \{1, \dots, k\}$. Si ha:

$$w_\ell = x_{\ell,1} + \ldots + x_{\ell,k_\ell}$$

e

$$\mu_\ell x_{\ell,1} + \ldots + \mu_\ell x_{\ell,k_\ell} = \mu_\ell w_\ell = Bw_\ell = Bx_{\ell,1} + \ldots + Bx_{\ell,k_\ell},$$

dove ogni $Bx_{\ell,j} \in \mathbb{V}_{\lambda_j}(A)$ perché $\mathbb{V}_{\lambda_j}(A)$ è L_B-invariante. Poiché la somma in (1) è diretta, segue che:

$$Bx_{\ell,j} = \mu_\ell x_{\ell,j} \quad \text{per ogni } j \in \{1, \dots, k_\ell\}.$$

Il sottoinsieme $S = \{x_{1,1}, \dots, x_{1,k_1}, \dots, x_{n,1}, \dots, x_{n,k_n}\}$ di $\mathbb{K}^n$ è dunque costituito da autovettori comuni di A e B, e genera tutto $\mathbb{K}$ perché ogni vettore w_ℓ della base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{K}^n$ è uguale alla somma di alcuni elementi di S. È ora sufficiente estrarre una base di $\mathbb{K}^n$ da S. ∎

Esercizio 12.6 (Invarianti per similitudine). *Siano $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ due matrici simili. Allora si ha:*
(i) $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(B)$.
(ii) $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B)$ *e* $\det(A) = \det(B)$.
(iii) $P_A = P_B$.
(iv) $\sigma(A) = \sigma(B)$ *e, per ogni* $\lambda \in \sigma(A) = \sigma(B)$, $\mathrm{ma}(\lambda, A) = \mathrm{ma}(\lambda, B)$ *e* $\mathrm{mg}(\lambda, A) = \mathrm{mg}(\lambda, B)$ [3].

SOLUZIONE:
Sia $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tale che $B = M^{-1}AM$. Poiché M e M^{-1} sono invertibili, si ha: $\mathrm{rk}(B) = \mathrm{rk}(A)$. Inoltre valgono:
(i) $\mathrm{tr}(B) = \mathrm{tr}(M^{-1}AM) = \mathrm{tr}((AM)M^{-1}) = \mathrm{tr}(A)$;
(ii) $\det(B) = \det(M)^{-1}\det(A)\det(M) = \det(A)$;
(iii) $P_B(T) = \det(B - TI_n) = \det(M^{-1}AM - TI_n) = \det(M^{-1}(A - TI_n)M) = \det(A - TI_n) = P_A(T)$.

Da (iii) segue subito che $\sigma(A) = \sigma(B)$ e $\mathrm{ma}(\lambda, A) = \mathrm{ma}(\lambda, B)$ se $\lambda \in \sigma(A) = \sigma(B)$. Resta da provare che $\mathrm{mg}(\lambda, A) = \mathrm{mg}(\lambda, B)$, cioè (iv). Osserviamo che $B - \lambda I_n = M^{-1}AM - \lambda I_n = M^{-1}(A - \lambda I_n)M$ e quindi $\mathrm{rk}(A - \lambda I_n) = \mathrm{rk}(B - \lambda I_n)$. Segue che: $\mathrm{mg}(\lambda, A) = n - \mathrm{rk}(A - \lambda I_n) = n - \mathrm{rk}(B - \lambda I_n) = \mathrm{mg}(\lambda, B)$. ∎

Esercizio 12.7 (Triangolazione). *Sia $A \in M_n(\mathbb{K})$ una matrice avente tutti gli autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (eventualmente ripetuti) in $\mathbb{K}$. Allora A è simile ad una matrice triangolare superiore, ovvero esistono una matrice $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ e una matrice triangolare superiore $S \in M_n(\mathbb{K})$ con elementi diagonali $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tali che $S = M^{-1}AM$.*

Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ (rispettivamente $\mathbb{K} = \mathbb{R}$), allora M può essere scelta unitaria (rispettivamente ortogonale)[4].

[3] In generale, le proprietà (i), (ii), (iii) e (iv) sono necessarie ma non sufficienti affinché A e B siano simili: si veda l'Esercizio 12.17).

[4] In questi due casi, la matrice S è detta *forma canonica (o normale) di Schur di A*.

SOLUZIONE:

Procediamo per induzione su $n \geq 1$.

$\underline{n = 1}$ Ogni matrice 1×1 è triangolare superiore.

$\underline{n \Longrightarrow n+1.}$ Supponiamo che $A \in M_{n+1}(\mathbb{K})$ abbia tutti gli autovalori $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \lambda_{n+1}$ in $\mathbb{K}$. Sia v_1 un autovettore di A. Completiamo v_1 ad una base $\mathcal{B} = (v_1, w_2, \ldots, w_{n+1})$ di $\mathbb{K}^{n+1}$. Se $\mathtt{C}_{n+1}$ indica la base canonica di $\mathbb{K}^{n+1}$ e $P \in \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{K})$ la matrice $\mathcal{M}_{\mathtt{C}_{n+1},\mathcal{B}}(\mathbf{1}_{\mathbb{K}^{n+1}})$ di cambiamento di coordinate da $\mathcal{B}$ a $\mathtt{C}_{n+1}$, allora vale:

$$\left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & \boldsymbol{c} \\ \hline \mathbf{0} & A_1 \end{array}\right) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(L_A) = \left(\mathcal{M}_{\mathtt{C}_{n+1},\mathcal{B}}(\mathbf{1}_{\mathbb{K}^{n+1}})\right)^{-1}\mathcal{M}_{\mathtt{C}_{n+1}}(L_A)\mathcal{M}_{\mathtt{C}_{n+1},\mathcal{B}}(\mathbf{1}_{\mathbb{K}^{n+1}}) = P^{-1}AP$$

per qualche $\boldsymbol{c} \in M_{1,n}(\mathbb{K})$ e $A_1 \in M_n(\mathbb{K})$, dove $\mathbf{0} \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ è il vettore nullo. Poiché $P_A(T) = (\lambda_1 - T)P_{A_1}(T)$, A_1 ha tutti gli autovalori in $\mathbb{K}$ e tali autovalori sono uguali a $\lambda_2, \ldots, \lambda_{n+1}$. Per ipotesi induttiva, esiste $S_1 \in M_n(\mathbb{K})$ triangolare superiore e $P_1 \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tale che $S_1 = P_1^{-1}A_1P_1$. Definiamo $M \in \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{K})$ come il seguente prodotto matriciale:

$$M := P \cdot \left(\begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{0}^T \\ \hline \mathbf{0} & P_1 \end{array}\right).$$

Vale:

$$M^{-1}AM = \left(\begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{0}^T \\ \hline \mathbf{0} & P_1 \end{array}\right)^{-1}\left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & \boldsymbol{c} \\ \hline \mathbf{0} & A_1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{0}^T \\ \hline \mathbf{0} & P_1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{0}^T \\ \hline \mathbf{0} & P_1^{-1} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & \boldsymbol{c}P_1 \\ \hline \mathbf{0} & A_1P_1 \end{array}\right) =$$
$$= \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & \boldsymbol{c}P_1 \\ \hline \mathbf{0} & S_1 \end{array}\right).$$

Poiché quest'ultima matrice è triangolare superiore, la dimostrazione è completa.

Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ e si desidera che M sia unitaria, allora si può procedere per induzione come sopra. L'unica differenza sta nella scelta di v_1 che deve essere un versore e della base $\mathcal{B}$ che deve essere ortonormale. Simili considerazioni si possono ripetere nel caso reale. ■

Esercizio 12.8. *Sia $Q(X) = a_dX^d + a_{d-1}X^{d-1} + \ldots + a_1X + a_0$ un polinomio in $\mathbb{K}[X]$. Per ogni $A \in M_n(\mathbb{K})$, definiamo la matrice $Q(A) \in M_n(\mathbb{K})$ ponendo:*

$$Q(A) := a_dA^d + a_{d-1}A^{d-1} + \ldots + a_1A + a_0I_n.$$

Si dimostrino le seguenti affermazioni:

(i) *Se $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ sono simili, allora anche $Q(A)$ e $Q(B)$ lo sono.*

(ii) *Se $A \in M_n(\mathbb{K})$ ha tutti gli autovalori $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (eventualmente ripetuti) in $\mathbb{K}$, allora $Q(\lambda_1), \ldots, Q(\lambda_n)$ sono tutti gli autovalori (eventualmente ripetuti) di $Q(A)$.*

SOLUZIONE:

(i) Sia $N \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tale che $A = N^{-1}BN$. Allora, per ogni $\ell \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$, si ha:

$$A^\ell = (N^{-1}TBN)^\ell = \overbrace{N^{-1}BN \cdot N^{-1}BN \cdots N^{-1}BN}^{\ell\text{–volte}} = N^{-1}B^\ell N.$$

Segue che:

$$Q(A) = a_dA^d + \ldots + a_1A + a_0I_n = a_dN^{-1}B^dN + \ldots + a_1N^{-1}BN + a_0N^{-1}N = N^{-1}Q(B)N.$$

(ii) Per l'Esercizio 12.7 o per il teorema di Jordan (vedi sotto), A è simile ad una matrice triangolare superiore $S \in M_n(\mathbb{K})$. Gli elementi diagonali di S sono uguali a $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ e quindi $Q(S)$ è una matrice triangolare superiore avente elementi diagonali uguali a $Q(\lambda_1), \ldots, Q(\lambda_n)$. Grazie al precedente punto (i), $Q(A)$ è simile a $Q(S)$. Segue che $Q(A)$ ha lo stesso polinomio caratteristico di $Q(S)$, che è uguale a $P_{Q(S)}(T) = (Q(\lambda_1)-T)\cdots(Q(\lambda_n)-T)$. Dunque $Q(\lambda_1), \ldots, Q(\lambda_n)$ sono tutti gli autovalori (eventualmente ripetuti) di $Q(A)$. ■

Esercizio 12.9. *Si provi che, se $A \in M_n(\mathbb{K})$ ha tutti gli autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ (eventualmente ripetuti) in $\mathbb{K}$, allora valgono:*

(i) $\mathrm{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$.

(ii) $\det(A) = \lambda_1\lambda_2 \cdots \lambda_n$.

(iii) *Se* $P_A(T) = (-1)^n T^n + a_{n-1}T^{n-1} + \ldots + a_1 T + a_0$ *è il polinomio caratteristico di* A, *allora* $\mathrm{tr}(A) = (-1)^{n-1}a_{n-1}$ *e* $\det(A) = a_0$.

SOLUZIONE:

Per l'Esercizio 12.7 o per il teorema di Jordan (vedi sotto), A è simile ad una matrice triangolare superiore $S \in M_n(\mathbb{K})$. Gli elementi diagonali di S sono uguali a $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ e quindi si ha:

$$\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(S) = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n, \qquad \det(A) = \det(S) = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

e

$$P_A(T) = (\lambda_1 - T)(\lambda_2 - T)\cdots(\lambda_n - T) = (-1)^n T^n + (-1)^{n-1}(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n)T^{n-1} + \ldots + \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

In particolare, si ha: $a_0 = \det(A)$ e $(-1)^{n-1}\mathrm{tr}(A) = a_{n-1}$, ovvero $\mathrm{tr}(A) = (-1)^{n-1}a_{n-1}$. ■

Esercizio 12.10. *Sia* $A \in M_n(\mathbb{K})$ *una matrice diagonale a blocchi della seguente forma:*

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & A_k \end{pmatrix},$$

dove $A_1 \in M_{m_1}(\mathbb{K}), \ldots, A_k \in M_{m_k}(\mathbb{K})$ *per qualche* $m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{N}^*$ *con* $m_1 + \ldots + m_k = n$. *Sia* p *una permutazione di* $\{1, 2\ldots, k\}$ *e sia* A_p *la matrice diagonale a blocchi ottenuta riordinando gli elementi diagonali di* A *secondo* p:

$$A_p := \begin{pmatrix} A_{p(1)} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_{p(2)} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & A_{p(k)} \end{pmatrix}.$$

Si dimostri che A *e* A_p *sono simili, e si calcoli una matrice* $M_p \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ *tale che* $A_p = M_p^{-1}AM_p$.

SOLUZIONE:

Per ogni $h \in \{1, \ldots, k+1\}$, definiamo $m_h^* := m_1 + \ldots + m_{h-1}$, dove $m_1^* := 0$. Si osservi che $m_{h+1}^* = m_h^* + m_h$ se $h < k+1$. Indichiamo con $\mathsf{C}_n = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonica di $\mathbb{K}^n$. Definiamo la base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{K}^n$ ponendo

$$\mathcal{B} := (e_{m^*_{p(1)}+1}, \ldots, e_{m^*_{p(1)+1}}, e_{m^*_{p(2)}+1}, \ldots, e_{m^*_{p(2)+1}}, \ldots, e_{m^*_{p(k)}+1}, \ldots, e_{m^*_{p(k)+1}})$$

e denotiamo con M_p la matrice $\mathcal{M}_{\mathsf{C}_n,\mathcal{B}}(\mathbf{1}_{\mathbb{K}^n})$ di cambiamento di coordinate da $\mathcal{B}$ a C_n. Osserviamo che $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(L_A) = A_p$ e quindi vale:

$$A_p = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(L_A) = \left(\mathcal{M}_{\mathsf{C}_n,\mathcal{B}}(\mathbf{1}_{\mathbb{K}^n})\right)^{-1}\mathcal{M}_{\mathsf{C}_n}(L_A)\mathcal{M}_{\mathsf{C}_n,\mathcal{B}}(\mathbf{1}_{\mathbb{K}^n}) = M_p^{-1}AM_p.$$

In particolare A e A_p sono simili. ■

Forma canonica di Jordan e criterio di similitudine. Sia $\mathbb{K}$ un campo, sia $m \in \mathbb{N}^*$ e sia $\lambda \in \mathbb{K}$. La matrice triangolare superiore $J_m(\lambda) \in M_m(\mathbb{K})$ avente λ sulla diagonale principale, 1 sulla sopradiagonale (cioé in posizione $(i, i+1)$ con $i \in \{1, \ldots, m-1\}$) e 0 altrove è detta *blocco di Jordan di ordine* m *relativo a* λ [5]:

$$J_m(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

[5]Se $m = 1$, allora $J_m(\lambda) = (\lambda) = \lambda \in M_1(\mathbb{K}) = \mathbb{K}$.

Una matrice $J \in M_n(\mathbb{K})$ è detta *matrice in forma canonica di Jordan* se è una matrice diagonale a blocchi con elementi diagonali uguali a blocchi di Jordan, ovvero è della seguente forma:

$$J = \begin{pmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & J_{n_2}(\lambda_2) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & J_{n_s}(\lambda_s) \end{pmatrix}$$

per qualche $n_1, \ldots, n_s \in \mathbb{N}^*$ (non necessariamente distinti) con $n_1 + \ldots + n_s = n$ e per qualche $\lambda_1, \ldots, \lambda_s \in \mathbb{K}$ (non necessariamente distinti), ove i vari $\mathbf{0}$ indicano matrici nulle di opportuni ordini.

Ricordiamo il teorema di Jordan.

Teorema (Jordan). *Sia A una matrice in $M_n(\mathbb{K})$ avente tutti gli autovalori in $\mathbb{K}$ (ovvero il cui polinomio caratteristico P_A ha tutte le radici in $\mathbb{K}$). Allora A è simile ad una matrice in forma canonica di Jordan, che è unica a meno di permutazioni dei blocchi di Jordan che la compongono.*

Più precisamente, vale ciò che segue. Sia $P_A(T) = (-1)^n(T-\lambda_1)^{m_1}(T-\lambda_2)^{m_2}\cdots(T-\lambda_k)^{m_k}$ con $\lambda_i \neq \lambda_j$ se $i \neq j$, ovvero $\sigma(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$ e $m_h = \mathrm{ma}(\lambda_h, A)$ per ogni $h \in \{1, \ldots, k\}$. Allora A è simile ad una matrice $J \in M_n(\mathbb{K})$ [6] in forma canonica di Jordan del tipo:

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & J_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & J_k \end{pmatrix},$$

dove ogni $J_h \in M_{m_h}(\mathbb{K})$ è a sua volta una matrice in forma canonica di Jordan di ordine m_h avente solo l'autovalore λ_h e del tipo seguente:

$$J_h = \begin{pmatrix} J_{n_{h,1}}(\lambda_h) & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & J_{n_{h,2}}(\lambda_h) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & J_{n_{h,g_h}}(\lambda_h) \end{pmatrix}$$

per qualche $n_{h,1}, \ldots, n_{h,g_h} \in \mathbb{N}^*$ con $n_{h,1} + \ldots + n_{h,g_h} = m_h$ e per ogni $h \in \{1, \ldots, k\}$. La matrice J è unica a meno di permutazioni dei blocchi $J_{n_{h,\ell}}(\lambda_h)$ di Jordan che la compongono.

Segue che, a meno di permutazioni dei blocchi di Jordan che la compongono, la matrice J è univocamente determinata dal numero g_h dei blocchi di Jordan $\{J_{n_{h,\ell}}(\lambda_h)\}_{\ell=1}^{g_h}$ relativi all'autovalore λ_h e dagli ordini $n_{h,\ell}$ dei blocchi $\{J_{n_{h,\ell}}(\lambda_h)\}_{\ell=1}^{g_h}$ stessi, *per ogni $h \in \{1, \ldots, k\}$.*

Esercizio 12.11. *Siano $A \in M_n(\mathbb{K})$ e $J \in M_n(\mathbb{K})$ come sopra. Si dimostri che, per ogni $h \in \{1, \ldots, k\}$, il numero g_h dei blocchi di Jordan di J relativi all'autovalore λ_h coincide con la molteplicità geometrica di λ_h per A, cioé vale:*

$$g_h = \mathrm{mg}(\lambda_h, A).$$

Dedurre da queste uguaglianze il seguente criterio di diagonalizzabilità: "Una matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ è diagonalizzabile (su $\mathbb{K}$) se ha tutti gli autovalori $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ in $\mathbb{K}$ e se $\mathrm{mg}(\lambda_h, A) = \mathrm{ma}(\lambda_h, A)$ per ogni $h \in \{1, \ldots, k\}$".

SOLUZIONE:

Sia $p \in \{1, \ldots, k\}$. Ricordiamo che $\mathrm{mg}(\lambda_p, J) = \mathrm{mg}(\lambda_p, A)$. Infatti, se M è una matrice in $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tale che $J = M^{-1}AM$, allora $J - \lambda_p I_n = M^{-1}(A - \lambda_p I_n)M$, $\mathrm{rk}(J - \lambda_p I_n) = \mathrm{rk}(A - \lambda_p I_n)$ e quindi

$$\mathrm{mg}(\lambda_p, J) = n - \mathrm{rk}(J - \lambda_p I_n) = n - \mathrm{rk}(A - \lambda_p I_n) = \mathrm{mg}(\lambda_p, A).$$

Dobbiamo dunque provare che $g_p = \mathrm{mg}(\lambda_p, J)$. La matrice $J - \lambda_p I_n$ è in forma canonica di Jordan ed ha per elementi diagonali i blocchi di Jordan $J_{n_{h,\ell}}(\lambda_h) - \lambda_p I_{n_{h,\ell}}$ con $h \in \{1, \ldots, k\}$ e $\ell \in \{1, \ldots, g_h\}$. Osserviamo che le g_p colonne di $J - \lambda_p I_n$ corrispondenti ai primi elementi diagonali dei blocchi $\{J_{n_{p,\ell}}(\lambda_p) - \lambda_p I_{n_{p,\ell}}\}_{\ell=1}^{g_p}$ e le g_p righe di $J - \lambda_p I_n$ corrispondenti agli ultimi elementi diagonali dei blocchi $\{J_{n_{p,\ell}}(\lambda_p) - \lambda_p I_{n_{p,\ell}}\}_{\ell=1}^{g_p}$ sono nulle. Cancellando tali righe e colonne da $J - \lambda_p I_n$ otteniamo una matrice J' triangolare superiore avente stesso rango di $J - \lambda_p I_n$ con i seguenti elementi diagonali: 1 ripetuto $m_p - g_p$ volte e $\lambda_h - \lambda_p$ ripetuto

[6] La matrice J è usualmente detta *forma canonica di Jordan di A*.

m_h volte per ogni $h \in \{1, \ldots, k\} \setminus \{p\}$. Segue che $\det(J') \neq 0$, $n - g_p = \mathrm{rk}(J') = \mathrm{rk}(J - \lambda_p I_n)$ e quindi $\mathrm{mg}(\lambda_p, J) = n - \mathrm{rk}(J - \lambda_p I_n) = g_p$ come desiderato.

Un blocco di Jordan $J_n(\lambda)$ è diagonalizzabile se e soltanto se $n = 1$ (vedi Osservazione 13.15(3), pp. 171–172 del Sernesi). Segue che A è diagonalizzabile se e soltanto se J è diagonale, ovvero se e soltanto se, per ogni $h \in \{1, \ldots, k\}$, sono presenti $g_h = m_h$ blocchi di Jordan di ordine 1 relativi a λ_h, che coincide col suddetto criterio. ■

Esercizio 12.12 (Criterio di similitudine: caso di molteplicità algebriche ≤ 3). *Siano A e B due matrici in $M_n(\mathbb{K})$ aventi tutti gli autovalori in $\mathbb{K}$. Supponiamo che tutti gli autovalori di A e tutti gli autovalori di B abbiano molteplicità algebrica ≤ 3. Si dimostri l'equivalenza tra le seguenti affermazioni:*

- (2a) *A è simile a B.*
- (2b) *A e B hanno la stessa forma canonica di Jordan (a meno di permutazioni dei blocchi di Jordan che la compongono).*
- (2c) *A e B hanno gli stessi autovalori $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ con la stessa molteplicità algebrica e geometrica.*
- (2d) *A e B hanno lo stesso polinomio caratteristico $(-1)^n(T - \lambda_1)^{m_1}(T - \lambda_2)^{m_2} \cdots (T - \lambda_k)^{m_k}$ e $\mathrm{mg}(\lambda_h, A) = \mathrm{mg}(\lambda_h, B)$ per ogni $h \in \{1, \ldots, k\}$.* [7]

SOLUZIONE:

L'equivalenza tra (2a) e (2b) segue subito dal teorema di Jordan. L'equivalenza tra (2c) e (2d) è evidente. L'implicazione (2a) $\Longrightarrow$ (2c) è ben nota (vedi Esercizio 12.6(iv)).

Resta da dimostrare l'implicazione (2c) $\Longrightarrow$ (2b). Sia J la forma canonica di Jordan di A. Dobbiamo provare che, a meno di permutazione dei blocchi di Jordan che la compongono, J è univocamente determinata dalle molteplicità algebriche e geometriche dei suoi autovalori $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$. Sia $h \in \{1, \ldots, k\}$, sia $m_h := \mathrm{ma}(\lambda_h, A)$ e $g_h := \mathrm{mg}(\lambda_h, A)$. Il numero di blocchi di Jordan relativi a λ_h presenti in J è uguale a g_h [8] e la somma degli ordini di tali blocchi è uguale a m_h (vedi il teorema di Jordan). Siano $J_{n_1}(\lambda_h), \ldots, J_{n_{g_h}}(\lambda_h)$ i blocchi di Jordan relativi a λ_h presenti in J. Come abbiamo già osservato vale: $n_1 + \ldots + n_{g_h} = m_h$. Per ipotesi $m_h \leq 3$, dunque possiamo distinguere i seguenti casi:

- Caso 1: $m_h = g_h = 1$. In J è presente, relativamente a λ_h, il solo blocco di Jordan $J_1(\lambda_h) = (\lambda_h)$.
- Caso $2'$: $m_h = 2$, $g_h = 1$. In J è presente, relativamente a λ_h, il solo blocco di Jordan $J_2(\lambda_h)$.
- Caso $2''$: $m_h = g_h = 2$. In J sono presenti, relativamente a λ_h, esattamente due blocchi di Jordan di ordine 1. In altri termini la matrice in forma di Jordan costituita dai blocchi di Jordan relativi a λ_h presenti in J (che nell'enunciato del teorema di Jordan viene indicato con J_h) è uguale a $\lambda_h I_2$.
- Caso $3'$: $m_h = 3$, $g_h = 1$. In J è presente, relativamente a λ_h, il solo blocco di Jordan $J_3(\lambda_h)$.
- Caso $3''$: $m_h = 3$, $g_h = 2$. In questo caso sono presenti due blocchi di Jordan di ordini n_1 e n_2 relativamente a λ_h con $n_1 + n_2 = 3$ e $n_1, n_2 \in \mathbb{N}^*$. Le soluzioni di questa equazione sono solo due: $(n_1.n_2) = (1, 2)$ e $(n_1, n_2) = (2, 1)$. Poiché tali soluzioni sono simmetriche, a meno di trasporre i blocchi di Jordan, in J sono presenti, relativamente a λ_h, esattamente due blocchi di Jordan, uno di ordine 2 e l'altro di ordine 1. In altri parole J_h ha la seguente forma:

$$J_h = \left(\begin{array}{cc|c} \lambda_h & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_h & 0 \\ \hline 0 & 0 & \lambda_h \end{array}\right).$$

- Caso $3'''$: $m_h = g_h = 3$. In J sono presenti, relativamente a λ_h, esattamente tre blocchi di Jordan di ordine 1. In altri termini $J_h = \lambda_h I_3$.

NOTA. Le precedenti considerazioni permettono di calcolare la forma canonica di Jordan di ogni matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ avente tutti gli autovalori in $\mathbb{K}$ e con molteplicità algebrica ≤ 3 (in particolare se $n \leq 3$). ■

[7] Si può dimostrare anche ciò che segue: "*Sia $A \in M_n(\mathbb{K})$ una matrice con tutti gli autovalori in $\mathbb{K}$ e sia J la forma canonica di Jordan di A. Allora, per ogni $\lambda \in \sigma(A)$ e per ogni $s \in \mathbb{N}^*$, il numero di blocchi $J_s(\lambda)$ di Jordan di ordine s relativi a λ che compaiono in J è uguale a* $\mathrm{rk}((A - \lambda I_n)^{s+1}) - 2\mathrm{rk}((A - \lambda I_n)^s) + \mathrm{rk}((A - \lambda I_n)^{s-1})$". Una conseguenza immediata di quest'ultimo fatto è il seguente **criterio generale di similitudine:** "*Siano A e B due matrici in $M_n(\mathbb{K})$ aventi tutti gli autovalori in $\mathbb{K}$. Allora A e B sono simili se e soltanto se $\sigma(A) = \sigma(B)$ e $\mathrm{rk}((A - \lambda I_n)^s) = \mathrm{rk}((B - \lambda I_n)^s)$ per ogni $\lambda \in \sigma(A) = \sigma(B)$ e per ogni $s \in \{1, \ldots, n\}$*".

[8] Vedi esercizio precedente.

Esercizio 12.13. *Si calcoli la forma canonica di Jordan delle seguenti matrici $A, B, C, D \in M_3(\mathbb{R})$* [9] *e si dica quali sono simili tra loro:*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & \frac{5}{2} \\ 2 & -2 & 1 \\ -5 & \frac{3}{2} & -4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -5 & 4 & -1 \\ -4 & 1 & -2 \\ 8 & -4 & 3 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} & \frac{5}{4} \\ 0 & -11 & -30 \\ 0 & 4 & 11 \end{pmatrix} \text{ e } D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

SOLUZIONE:

Calcoliamo la forma canonica J_A di A. Poiché $P_A(\lambda) = -(\lambda+1)^3$, A possiede solo l'autovalore $\lambda_1 = -1$ con $\mathrm{ma}(\lambda_1, A) = 3$. Il rango di $A - \lambda_1 I_3$ è uguale a 2 e quindi $\mathrm{mg}(\lambda_1, A) = 3 - 2 = 1$. Dunque J_A contiene un solo blocco di Jordan di ordine 3 relativo a λ_1, ovvero J_A coincide con quest'ultimo:

$$J_A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Vediamo ora J_B e J_C. Valgono:

- $P_B(\lambda) = P_C(\lambda) = -(\lambda-1)(\lambda+1)^2 \Longrightarrow \sigma(B) = \sigma(C) = \{\lambda_1, \lambda_2\}$ con $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$;
- $\mathrm{ma}(\lambda_1, B) = 2$, $\mathrm{mg}(\lambda_1, B) = 1$ e $\mathrm{ma}(\lambda_1, C) = 2$, $\mathrm{mg}(\lambda_1, C) = 1$;
- $\mathrm{ma}(\lambda_2, B) = \mathrm{mg}(\lambda_2, B) = 1$ e $\mathrm{ma}(\lambda_2, C) = \mathrm{mg}(\lambda_2, C) = 1$.

Sia J_B che J_C sono costituite da un blocco di Jordan di ordine 1 relativo a λ_1 e da uno di ordine 2 relativo a λ_2:

$$J_B = J_C = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Calcoliamo infine J_D. Valgono:

- $P_D(\lambda) = -(\lambda+1)^3 \Longrightarrow \sigma(D) = \{\lambda_1\}$ con $\lambda_1 = -1$;
- $\mathrm{ma}(\lambda_1, D) = 3$, $\mathrm{mg}(\lambda_1, D) = 2$.

Dunque J_D è costituito da due blocchi di Jordan relativi a λ_1, uno di ordine 2 e l'altro di ordine 1:

$$J_D = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Segue che solo B e C sono simili. ■

Esercizio 12.14. *Si calcoli la forma canonica di Jordan delle seguenti matrici $A, B \in M_4(\mathbb{R})$* [10] *e si dica se sono simili:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3/2 & -1 \\ 0 & 1 & -3/2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 5/2 & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

SOLUZIONE:

Valgono:

- $P_A(\lambda) = (\lambda-1)^3(\lambda-2) \Longrightarrow \sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2\}$ con $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$;
- $\mathrm{ma}(\lambda_1, A) = 3$, $\mathrm{mg}(\lambda_1, A) = 4 - \mathrm{rk}(A - I_4) = 4 - 2 = 2$;
- $\mathrm{ma}(\lambda_2, A) = \mathrm{mg}(\lambda_2) = 1$.

Dunque la forma canonica J_A di Jordan di A è la seguente:

$$J_A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

Analoghi calcoli assicurano che la forma canonica di Jordan di B coincide con J_A. Dunque A e B sono simili. ■

[9] $-2A$, B e $4C$ coincidono con le matrici considerate nei punti a), d) ed e) dell'Esercizio 10, p. 190 di Sernesi.

[10] A coincide con la matrice considerata nel punto k) dell'Esercizio 17, p. 192 di Sernesi.

Esercizio 12.15. *Si determinino i valori di $t \in \mathbb{R}$ per cui le seguenti matrici $A_t, B_t \in M_4(\mathbb{R})$ sono simili:*

$$A_t = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 & 1 \\ 0 & t & 1 & 0 \\ 0 & 1 & t & 0 \\ 1 & 0 & 0 & t \end{pmatrix} \quad e \quad B_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -2+t \\ 0 & 1 & 2+t & 2 \\ -2 & -2+t & -1 & 0 \\ 2+t & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

SOLUZIONE:
Osserviamo che, se A_t e B_t sono simili, allora hanno la stessa traccia, cioè $4t = \mathrm{tr}(A_t) = \mathrm{tr}(B_t) = 0$, ovvero $t = 0$. Basta dunque considerare il caso $t = 0$. Si verifica che sia A_0 che B_0 possiedono gli autovalori 1 e -1 entrambi con molteplicità algebrica 2, e sono diagonalizzabili. Segue che le matrici A_0 e B_0 sono simili.
■

Esercizio 12.16 (Esercizio 17, punti n) e m), p. 192, Sernesi). *Si calcoli la forma canonica di Jordan delle seguenti matrici $A \in M_5(\mathbb{C})$ e $B \in M_6(\mathbb{C})$:*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad e \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 2i \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

SOLUZIONE:
Vedi risultati a p. 476 del Sernesi. ■

Esercizio 12.17. *Si dimostri che l'implicazione* (2c) $\Longrightarrow$ (2*b*) (*e quindi* (2c) $\Longrightarrow$ (2*a*)) *dell'Esercizio 12.12 è falsa se non si richiede che tutti gli autovalori di A e tutti gli autovalori di B abbiano molteplicità algebrica ≤ 3.*

SOLUZIONE:
Consideriamo le due matrici A e B in forma canonica di Jordan:

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{e} \quad B = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Si osservi che $\sigma(A) = \{0\} = \sigma(B)$, $\mathrm{ma}(0, A) = 4 = \mathrm{ma}(0, B)$ e $\mathrm{mg}(0, A) = 2 = \mathrm{mg}(0, B)$. Tuttavia A e B non sono simili in quanto, per il teorema di Jordan, due matrici in forma canonica di Jordan sono simili se e soltanto se si possono ottenere l'una dall'altra permutando i blocchi di Jordan che le compongono. Ciò non può fatto per A e B perché i blocchi di Jordan che le compongono hanno ordini diversi: 2 e 2 per A, e 3 e 1 per B. ■

Esercizio 12.18. *Si calcoli la forma canonica di Jordan delle seguenti matrici $A, B \in M_4(\mathbb{R})$ e si dica se sono simili:*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad e \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

SOLUZIONE:
Valgono:

- $P_A(\lambda) = (\lambda - 1)^4 \Longrightarrow \sigma(A) = \{\lambda_1\}$ con $\lambda_1 = 1$;
- $\mathrm{ma}(\lambda_1, A) = 4$, $\mathrm{mg}(\lambda_1, A) = 4 - \mathrm{rk}(A - I_4) = 4 - 2 = 2$

ed anche

- $P_B(\lambda) = (\lambda - 1)^4 \Longrightarrow \sigma(B) = \{\lambda_1\}$ con $\lambda_1 = 1$ come sopra;
- $\mathrm{ma}(\lambda_1, B) = 4$, $\mathrm{mg}(\lambda_1, B) = 4 - \mathrm{rk}(B - I_4) = 4 - 2 = 2$.

Dunque sia A che B possono avere le seguenti due forme canoniche di Jordan:

$$J_1 := \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \text{e} \quad J_2 := \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Per poter distinguere tra le due forme canoniche, possiamo procedere come segue. Osserviamo anzitutto che

$$(J_1 - \lambda_1 I_4)^2 = (J_1 - I_4)^2 = \mathbf{0} \quad \text{e} \quad (J_2 - \lambda_1 I_4)^2 = (J_2 - I_4)^2 = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \neq \mathbf{0},$$

dove $\mathbf{0}$ è la matrice nulla in $M_4(\mathbb{R})$. Siano ora $X, Y \in M_4(\mathbb{R})$ due matrici simili a J_1 e a J_2, rispettivamente. Proviamo che $(X - I_4)^2 = \mathbf{0}$ e $(Y - I_4)^2 \neq \mathbf{0}$. Siano $M, N \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ tali che $X = M^{-1}J_1M$ e $Y = N^{-1}J_2N$. Valgono:

$$(X - I_4)^2 = \left(M^{-1}(J_1 - I_4)M\right)^2 = M^{-1}(J_1 - I_4)^2 M = \mathbf{0}$$

e

$$(Y - I_4)^2 = \left(N^{-1}(J_2 - I_4)N\right)^2 = N^{-1}(J_2 - I_4)^2 N.$$

D'altra parte, si ha che $N^{-1}(J_2 - I_4)^2 N \neq \mathbf{0}$. Altrimenti, $N^{-1}(J_2 - I_4)^2 N = \mathbf{0}$ e quindi $(J_2 - I_4)^2 = N\mathbf{0}N^{-1} = \mathbf{0}$, che è assurdo. Segue che $(Y - I_4)^2 \neq \mathbf{0}$ come desiderato.

Dunque, per poter distinguere tra le due forme canoniche di Jordan, è sufficiente calcolare $(A - I_4)^2$ e $(B - I_4)^2$. Valgono:

$$(A - I_4)^2 = \mathbf{0} \quad \text{e} \quad (B - I_4)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}.$$

In conclusione, J_1 è la forma canonica di Jordan di A e J_2 quella di B. A e B non sono simili. ■

Esercizio 12.19. *Per ogni $t \in \mathbb{R}$, si calcoli la forma canonica di Jordan della seguente matrice*

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & t & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R}).$$

SOLUZIONE:

Sia $t \in \mathbb{R}$. Valgono:

- $P_{A_t}(T) = (T-1)^2(T+1)^2 \Longrightarrow \sigma(A_t) = \{\lambda_1, \lambda_2\}$ con $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ e $\mathrm{ma}(\lambda_1, A_t) = 2 = \mathrm{ma}(\lambda_2, A_t)$;
- $\mathrm{rk}(A_t - \lambda_1 I_4) = \mathrm{rk}(A_t - \lambda_2 I_4) = \begin{cases} 2 & \text{se } t = 0 \\ 3 & \text{se } t \neq 0 \end{cases} \Longrightarrow \mathrm{mg}(\lambda_1, A_t) = \mathrm{mg}(\lambda_2, A_t) = \begin{cases} 2 & \text{se } t = 0 \\ 1 & \text{se } t \neq 0 \end{cases}.$

Segue che la forma canonica di Jordan di A_t è uguale a

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \quad \text{se } t = 0$$

e

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \quad \text{se } t \neq 0.$$

■

Esercizio 12.20. *Sia $\mathbb{K}$ un campo e sia $A \in M_n(\mathbb{K})$. Si dimostri che le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(i) *A è nilpotente, cioè esiste $k \in \mathbb{N}^*$ tale che $A^k = \mathbf{0}$.*
(ii) *A possiede solamente l'autovalore nullo, cioè $P_A(T) = (-1)^n T^n$.*
(iii) $A^n = \mathbf{0}$.

SOLUZIONE:
L'implicazione (i) $\Longrightarrow$ (ii) è dimostrata nel Lemma 13.18, p. 178 di Sernesi. L'implicazione (ii) $\Longrightarrow$ (iii) segue subito dal teorema di Jordan e dal fatto, se $J \in M_n(\mathbb{K})$ è una matrice strettamente triangolare superiore, allora $J^n = \mathbf{0}$. Infine l'implicazione (iii) $\Longrightarrow$ (i) è evidente. ■

Esercizio 12.21 (Teorema di Hamilton-Cayley). *Se $A \in M_n(\mathbb{C})$, allora $P_A(A)$ è la matrice nulla.*

SOLUZIONE:
Sia $P_A(T) = (-1)^n (T-\lambda_1)^{m_1}(T-\lambda_2)^{m_2}\cdots(T-\lambda_k)^{m_k}$ con $\lambda_i \neq \lambda_j$ se $i \neq j$, e sia J la forma canonica di Jordan di A:

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & J_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & J_k \end{pmatrix},$$

dove ciascuna matrice $J_h \in M_{m_h}(\mathbb{C})$ è una matrice in forma canonica di Jordan composta da blocchi di Jordan relativi al solo autovalore λ_h. Sia $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tale che $A = M^{-1}JM$. Osserviamo che $P_A(A) = M^{-1}P_A(J)M$ [11] e

$$P_A(J) = \begin{pmatrix} P_A(J_1) & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & P_A(J_2) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & P_A(J_k) \end{pmatrix}.$$

Segue che la matrice $P_A(A)$ è nulla se e soltanto se ogni matrice $P_A(J_h)$ lo è . Sia $h \in \{1,\ldots,k\}$. Poiché $J_h - \lambda_h I_{m_h}$ è una matrice strettamente triangolare superiore di ordine m_h, si ha che $(J_h - \lambda_h I_{m_h})^{m_h} = \mathbf{0}$. Dunque vale:

$$P_A(J_h) = (-1)^n (J_h - \lambda_1 I_{m_h})^{m_1} \cdots (J_h - \lambda_h I_{m_h})^{m_h} \cdots (J_h - \lambda_k I_{m_h})^{m_k} = \mathbf{0},$$

come desiderato. ■

Diagonalizzazione tramite matrici unitarie e ortogonali: teorema spettrale. Sia $A \in M_n(\mathbb{C})$. Una matrice $B \in M_n(\mathbb{C})$ si dice *unitariamente simile ad A* (o *simile ad A tramite matrici unitarie*) se esiste $P \in \mathrm{U}(n)$ tale che $B = P^{-1}AP = P^H AP$. A è detta *unitariamente diagonalizzabile* (o *diagonalizzabile tramite matrici unitarie*) se è unitariamente simile ad una matrice diagonale.

Si osservi che, se $\mathbb{C}^n$ è dotato del prodotto hermitiano standard $\langle x, y\rangle_{\mathbb{C}^n} = x^T\overline{y}$, allora la matrice A è unitariamente diagonalizzabile se e soltanto se esiste una base ortonormale $\mathcal{O}$ di $\mathbb{C}^n$ diagonalizzante per l'operatore lineare $L_A : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ associato ad A. Se $\mathcal{O}$ ha queste proprietà, C_n è la base canonica di $\mathbb{C}^n$ e $P := \mathcal{M}_{\mathsf{C}_n,\mathcal{O}}(\mathbf{1}_{\mathbb{C}^n})$, allora $P \in \mathrm{U}(n)$ e $P^H AP$ è uguale a $\mathcal{M}_{\mathcal{O}}(L_A)$, che è una matrice diagonale in quanto la base $\mathcal{O}$ di $\mathbb{C}^n$ è diagonalizzante per L_A:

$$P^H AP = P^{-1}AP = \left(\mathcal{M}_{\mathsf{C}_n,\mathcal{O}}(\mathbf{1}_{\mathbb{C}^n})\right)^{-1}\mathcal{M}_{\mathsf{C}_n}(L_A)\mathcal{M}_{\mathsf{C}_n,\mathcal{O}}(\mathbf{1}_{\mathbb{C}^n}) = \mathcal{M}_{\mathcal{O}}(L_A).$$

Teorema spettrale (caso generale). *Una matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ è unitariamente diagonalizzabile se e soltanto se A è normale, ovvero $A^H A = AA^H$.*

Teorema spettrale (caso hermitiano). *Una matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ è unitariamente simile ad una matrice diagonale con elementi diagonali reali se e soltanto se A è hermitiana, ovvero $A^H = A$.* [12]

Sia ora $C \in M_n(\mathbb{R})$. Una matrice $D \in M_n(\mathbb{C})$ si dice *ortogonalmente simile a C* (o *simile a C tramite matrici ortogonali*) se esiste $Q \in \mathrm{O}(n)$ tale che $D = Q^{-1}CQ = Q^T CQ$. C è detta *ortogonalmente diagonalizzabile* (o *diagonalizzabile tramite matrici ortogonali*) se è ortogonalmente simile ad una matrice diagonale.

[11] Vedi la soluzione dell'Esercizio 12.8.
[12] In particolare, si ha che le matrici hermitiane hanno autovalori reali.

Anche in questo caso, se $\mathbb{R}^n$ è dotato del prodotto scalare standard $\langle x, y\rangle_{\mathbb{R}^n} = x^T y$, allora la matrice C è ortogonalmente diagonalizzabile se e soltanto se esiste una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ diagonalizzante per l'operatore lineare $L_C : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ associato a C. Se $\mathcal{O}$ ha queste proprietà, $\mathtt{C}_n$ è la base canonica di $\mathbb{R}^n$ e $Q := \mathcal{M}_{\mathtt{C}_n,\mathcal{O}}(\mathbf{1}_{\mathbb{R}^n})$, allora $Q \in \mathrm{O}(n)$ e $Q^T CQ$ è una matrice diagonale.

Teorema spettrale (caso reale). *Una matrice in $M_n(\mathbb{R})$ è ortogonalmente diagonalizzabile se e soltanto se è simmetrica.* [13]

Consideriamo il seguente esercizio:

Esercizio TS. *Sia $A \in M_n(\mathbb{C})$ una matrice assegnata esplicitamente. Si dica se A è unitariamente diagonalizzabile e, in caso affermativo, si calcoli una matrice $P \in \mathrm{SU}(n)$ tale che $P^H AP$ è diagonale.*

Ecco una procedura per risolvere l'esercizio:

(1) Si verifica se A è normale, calcolando e comparando $A^H A$ e AA^H. Se A non è normale, allora A non è unitariamente diagonalizzabile. Altrimenti A è unitariamente diagonalizzabile e si va avanti.
(2) Si calcola $\sigma(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$ risolvendo l'equazione polinomiale $P_A(\lambda) = 0$.
(3) Per ogni $h \in \{1, \ldots, k\}$, si calcola una base $\mathcal{B}_h$ dell'autospazio $\mathbb{V}_{\lambda_h}(A)$ di A relativo a λ_h[14].
(4) Per ogni $h \in \{1, \ldots, k\}$, si calcola una base ortonormale $\mathcal{O}_h$ dell'autospazio $\mathbb{V}_{\lambda_h}(A)$ applicando l'algoritmo di Gram–Schmidt a $\mathcal{B}_h$. [15]
(5) Si definisce la base $\mathcal{O} := (\mathcal{O}_1, \ldots, \mathcal{O}_k)$ di $\mathbb{C}^n$. Tale base è ortonormale e diagonalizzante per A (via similitudine). Segue che la matrice R di cambiamento di coordinate di $\mathbb{C}^n$ dalla base $\mathcal{O}$ alla base $\mathtt{C}_n$, cioè la matrice avente i vettori di $\mathcal{O}$ come colonne, è unitaria e $R^H AR$ è una matrice diagonale D.
(6) Si calcola $\det(R)$. Poiché R è unitaria, $\det(R)$ è un numero complesso u di norma 1 (infatti $I_n = R^H R$ e quindi per Binet vale: $1 = \det(\overline{R}^T)\det(R) = \overline{\det(R)}\det(R) = |\det(R)|^2$). Se $u = 1$, allora $R \in \mathrm{SU}(n)$ e quindi basta porre $P := R$. Se $u \neq 1$, allora è sufficiente definire P come la matrice ottenuta moltiplicando per $u^{-1} = \overline{u}$ una colonna di R scelta arbitrariamente (per esempio la prima). In tal modo $\det(P) = u^{-1}\det(R) = u^{-1}u = 1$, ovvero $P \in \mathrm{SU}(n)$. Poiché le colonne di P sono ancora autovettori di A, si ha che $P^H AP$ è diagonale; anzi è uguale a D.

Enunciamo due varianti del precedente esercizio:

Esercizio TS$'$. *Sia $A \in M_n(\mathbb{C})$ una matrice assegnata esplicitamente. Si dica se A è unitariamente simile ad una matrice diagonale con elementi diagonali reali e, in caso affermativo, si calcoli una matrice $P \in \mathrm{SU}(n)$ tale che $P^H AP$ è diagonale.*

Esercizio TS$''$. *Sia $C \in M_n(\mathbb{R})$ una matrice assegnata esplicitamente. Si dica se C è ortogonalmente diagonalizzabile e, in caso affermativo, si calcoli una matrice $Q \in \mathrm{SO}(n)$ tale che $Q^T CQ$ è diagonale.*

Questi esercizi si risolvono in modo simile al precedente, usando il Teorema spettrale nei casi hermitiano e reale.

Esercizio 12.22. *Siano $A, B \in M_2(\mathbb{C})$ le seguenti matrici complesse:*
$$A = \begin{pmatrix} 3 & \mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 3 \end{pmatrix} \quad e \quad B = \begin{pmatrix} 1-\mathrm{i} & 1-\mathrm{i} \\ -1+\mathrm{i} & 1-\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$
Si dica se ciascuna matrice è unitariamente diagonalizzabile (o meglio unitariamente simile ad una matrice diagonale con elementi diagonali reali) e, in caso affermativo, si calcoli una base ortonormale di $\mathbb{C}^2$ diagonalizzante per l'operatore associato alla matrice stessa.

Soluzione:

[13] In particolare, si ha che le matrici simmetriche reali (essendo hermitiane, se viste come matrici complesse) hanno tutti gli autovalori in $\mathbb{R}$.

[14] Si ricorda che, essendo A normale, non solo i suoi autospazi stanno in somma diretta e $\mathbb{V}_{\lambda_1}(A) \oplus \ldots \oplus \mathbb{V}_{\lambda_k}(A) = \mathbb{C}^n$, ma tali autospazi sono anche a due a due ortogonali.

[15] Dunque, se $\mathcal{B}_h = (v_1, \ldots, v_\ell)$, allora si applica Gram–Schmidt come segue:
- $w_1 := v_1$, $w_{k+1} := v_{k+1} - \frac{\langle v_{k+1}, w_1\rangle_{\mathbb{C}^n}}{\langle w_1, w_1\rangle_{\mathbb{C}^n}} w_1 - \ldots - \frac{\langle v_{k+1}, w_k\rangle_{\mathbb{C}^n}}{\langle w_k, w_k\rangle_{\mathbb{C}^n}} w_k$ con $k \in \{1, \ldots, \ell - 1\}$;
- $\mathcal{O}_h := (\hat{w}_1, \ldots, \hat{w}_\ell)$, dove $\hat{w}_j := w_j/\|w_j\|_{\mathbb{C}^n}$ e $\|w_j\|_{\mathbb{C}^n} := \sqrt{\langle w_j, w_j\rangle_{\mathbb{C}^n}}$.

Poiché A è hermitiana (cioè $A^H = A$), il teorema spettrale (caso hermitiano) assicura che A è unitariamente diagonalizzabile, anzi unitariamente simile ad una matrice diagonale con elementi diagonali reali. Il polinomio caratteristico di A è uguale a $(T-2)(T-4)$ e quindi $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2\}$ con $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 4$.

Calcoliamo una base ortonormale di $\mathbb{V}_{\lambda_1}(A)$. Si ha:

$$\mathbb{V}_{\lambda_1}(A) : \ (A - \lambda_1 I_2)X = 0 \ \text{ con } X = (x_1, x_2)^T \iff x_1 + \mathrm{i}x_2 = 0 \iff x_1 = -\mathrm{i}x_2.$$

Segue che

$$\mathbb{V}_{\lambda_1}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} -\mathrm{i}t \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \,\middle|\, t \in \mathbb{C} \right\} = < v_1 >, \ \text{ dove } v_1 = \begin{pmatrix} -\mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}$$

e quindi $\mathbb{V}_{\lambda_1}(A) = < \hat{w}_1 >$, dove

$$\hat{w}_1 := \frac{v_1}{\|v_1\|_{\mathbb{C}^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dunque $(\hat{w}_1)$ è una base ortonormale di $\mathbb{V}_{\lambda_1}(A)$.

Procedendo similmente si ottiene che, posto $\hat{w}_2 := (\frac{1}{\sqrt{2}})(\mathrm{i}, 1)^T$, $(\hat{w}_2)$ è una base ortonormale di $\mathbb{V}_{\lambda_2}(A)$.

In conclusione, $(\hat{w}_1, \hat{w}_2)$ è una base ortonormale di $\mathbb{C}^2$ diagonalizzante per A.

Consideriamo ora B. Osserviamo anzitutto che $B^H B = 4I_2 = BB^H$. Segue che B è normale e quindi il teorema spettrale (caso generale) assicura che B è unitariamente diagonalizzabile.

Valgono:

- $P_B(T) = (T-2)(T+2\mathrm{i}) \Longrightarrow \sigma(B) = \{\lambda_3, \lambda_4\}$ con $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_3 = -2\mathrm{i}$.
- $\mathbb{V}_{\lambda_1}(B) = < \hat{w}_1 >$ e $\mathbb{V}_{\lambda_3}(B) = < \hat{w}_2 >$, dove $\hat{w}_1$ e $\hat{w}_2$ sono i versori definiti sopra.
- $(\hat{w}_1, \hat{w}_2)$ è una base ortonormale di $\mathbb{C}^2$ diagonalizzante anche per B.

■

Esercizio 12.23. *Siano $A \in M_3(\mathbb{C})$ la seguente matrice:*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2\mathrm{i} & 2 \\ 2\mathrm{i} & 5 & -\mathrm{i} \\ 2 & \mathrm{i} & 5 \end{pmatrix}.$$

Si dica se A è unitariamente diagonalizzabile e, in caso affermativo, si calcoli una matrice $P \in \mathrm{SU}(3)$ tale che $P^H AP$ è diagonale.

SOLUZIONE:

Poiché A è hermitiana (cioè $A^H = A$), il teorema spettrale (caso hermitiano) assicura che A è unitariamente diagonalizzabile, anzi unitariamente simile ad una matrice diagonale con elementi diagonali reali. Il polinomio caratteristico di A è uguale a $-T(T-6)^2$ e quindi $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2\}$ con $\lambda_1 = 6$ e $\lambda_2 = 0$.

Calcoliamo una base ortonormale di $\mathbb{V}_{\lambda_1}(A)$. Si ha:

$$\mathbb{V}_{\lambda_1}(A) : \ (A - \lambda_1 I_4)X = 0 \ \text{ con } X = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \iff 2x_1 + \mathrm{i}x_2 - x_3 = 0 \iff x_3 = 2x_1 + \mathrm{i}x_2.$$

Segue che

$$\mathbb{V}_{\lambda_1}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ s \\ 2t + \mathrm{i}s \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, t, s \in \mathbb{R} \right\} = < v_1, v_2 >, \ \text{ dove } v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ e } v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

Applichiamo Gram–Schmidt alla base (v_1, v_2) di $\mathbb{V}_{\lambda_1}(A)$:

- $w_1 := v_1$, $\langle w_1, w_1 \rangle_{\mathbb{C}^3} = |1|^2 + |2|^2 = 5$, $\|w_1\|_{\mathbb{C}^3} = \sqrt{\langle w_1, w_1 \rangle_{\mathbb{C}^3}} = \sqrt{5}$;
- $w_2 := v_2 - \dfrac{\langle v_2, w_1 \rangle_{\mathbb{C}^3}}{\langle w_1, w_1 \rangle_{\mathbb{C}^3}} w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix} - \dfrac{1}{5}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & \mathrm{i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2\mathrm{i}}{5} \\ 1 \\ \frac{\mathrm{i}}{5} \end{pmatrix}$, $\langle w_2, w_2 \rangle_{\mathbb{C}^3} = \left| -\dfrac{2\mathrm{i}}{5} \right|^2 + |1|^2 + \left| \dfrac{\mathrm{i}}{5} \right|^2 = \dfrac{4}{25} + 1 + \dfrac{1}{25} = \dfrac{6}{5}$, $\|w_2\|_{\mathbb{C}^3} = \sqrt{\frac{6}{5}}$;
- $\hat{w}_1 := \dfrac{w_1}{\|w_1\|_{\mathbb{C}^3}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\hat{w}_2 := \dfrac{w_2}{\|w_2\|_{\mathbb{C}^3}} = \dfrac{1}{\sqrt{\frac{6}{5}}} \begin{pmatrix} -\frac{2\mathrm{i}}{5} \\ 1 \\ \frac{\mathrm{i}}{5} \end{pmatrix} = \dfrac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} -2\mathrm{i} \\ 5 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}$.

Segue che $(\hat{w}_1, \hat{w}_2)$ è una base ortonormale di $\mathbb{V}_{\lambda_1}(A)$.

Passiamo ora a $\mathbb{V}_{\lambda_2}(A)$. Risolvendo il sistema $(A - \lambda_2 I_3)X = 0$, otteniamo:

$$\mathbb{V}_{\lambda_2}(A) = < v_3 >, \ \text{ dove } v_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}$$

e quindi $\mathbb{V}_{\lambda_2}(A) =< \hat{w}_3 >$, dove

$$\hat{w}_3 := \frac{v_3}{\|v_3\|_{\mathbb{C}^3}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -2 \\ \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Segue che $\mathcal{O} := (\hat{w}_1, \hat{w}_2, \hat{w}_3)$ è una base ortonormale di $\mathbb{C}^3$ diagonalizzante (via similitudine) per A e, se $M \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ denota la matrice avente $\hat{w}_1, \hat{w}_2, \hat{w}_3$ come colonne, allora $M \in \mathrm{U}(3)$ e

$$D = \mathcal{M}_{\mathcal{O}}(L_A) = \left(\mathcal{M}_{\mathcal{C}_3,\mathcal{O}}(\mathbf{1}_{\mathbb{C}^3})\right)^{-1}\mathcal{M}_{\mathcal{C}_3}(L_A)\mathcal{M}_{\mathcal{C}_3,\mathcal{O}}(\mathbf{1}_{\mathbb{C}^3}) = M^{-1}AM = M^H AM, \text{ dove } D = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Osserviamo che

$$\det(M) = \frac{1}{30}\begin{vmatrix} 1 & -2\mathrm{i} & -2 \\ 0 & 5 & \mathrm{i} \\ 2 & \mathrm{i} & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Dunque $M \in \mathrm{SU}(3)$. È quindi sufficiente porre $P := M$ per completare l'esercizio.

NOTA. La base ortonormale $\mathcal{O}$ di $\mathbb{C}^3$ diagonalizzante per A non è mai unica. Ad esempio, tutte le basi di $\mathbb{C}^3$ che si ottengono moltiplicando gli elementi di $\mathcal{O}$ per qualche numero complesso di norma 1 sono ancora ortonormali, sono ancora costituite da autovettori di A e quindi sono diagonalizzanti per A.

Anche un diverso svolgimento dell'esercizio può portare a basi diverse. Facciamo un esempio.

Supponiamo di aver risolto l'equazione cartesiana $2x_1 + \mathrm{i}x_2 - x_3 = 0$ di $\mathbb{V}_{\lambda_1}(A)$ esplicitando x_2 rispetto a x_1 e a x_3: $x_2 = 2\mathrm{i}x_1 - \mathrm{i}x_3$. In questo modo otteniamo la seguente base (v_1', v_2') di $\mathbb{V}_{\lambda_1}(A)$: $v_1' := (0, -\mathrm{i}, 1)^T$ e $v_2' := (1, 2\mathrm{i}, 0)^T$. L'algoritmo di Gram–Schmidt fornisce invece la seguente base ortonormale $(\hat{w}_1', \hat{w}_2')$ di $\mathbb{V}_{\lambda_1}(A)$: $\hat{w}_1' := \frac{1}{\sqrt{2}}(0, -\mathrm{i}, 1)^T$ e $\hat{w}_2' := \frac{1}{\sqrt{3}}(1, \mathrm{i}, 1)^T$. Se $\hat{w}_3$ è il versore di $\mathbb{C}^3$ definito sopra, allora $\mathcal{O}' := (\hat{w}_1', \hat{w}_2', \hat{w}_3)$ è una base ortonormale di $\mathbb{C}^3$ diagonalizzante per A. La matrice $M' \in \mathrm{U}(3)$ avente per colonne gli elementi di $\mathcal{O}'$ è tale che $(M')^H AM' = (M')^{-1}AM' = D$. Il determinante di M' è uguale a i, così la matrice P' ottenuta moltiplicando una delle colonne di M' (ad esempio la prima colonna di M') per $-\mathrm{i}$ appartiene a $\mathrm{SU}(3)$ (essendo $\det(P') = -\mathrm{i}\det(M') = -\mathrm{i}^2 = 1$). Inoltre vale: $(P')^H AP' = (P')^{-1}AP' = D$. ■

Esercizio 12.24. *Siano $A \in M_3(\mathbb{R})$ e $B \in M_3(\mathbb{C})$ le seguenti matrici:*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \quad e \quad B = \mathrm{i}A = \begin{pmatrix} 2\mathrm{i} & 2\mathrm{i} & 2\mathrm{i} \\ 2\mathrm{i} & 5\mathrm{i} & -\mathrm{i} \\ 2\mathrm{i} & -\mathrm{i} & 5\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

Si dica se A è ortogonalmente diagonalizzabile e, in caso affermativo, si calcoli una matrice $Q \in \mathrm{SO}(3)$ tale che $Q^T AQ$ è diagonale. Si dica inoltre se B è unitariamente diagonalizzabile e, in caso affermativo, si calcoli una matrice $P \in \mathrm{SU}(3)$ tale che $P^H BP$ è diagonale.

SOLUZIONE:

Poiché A è simmetrica, il teorema spettrale (caso reale) assicura che A è ortogonalmente diagonalizzabile. Il polinomio caratteristico di A è uguale a $-T(T-6)^2$ e quindi $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2\}$ con $\lambda_1 = 6$ e $\lambda_2 = 0$.

Calcoliamo una base ortonormale di $\mathbb{V}_{\lambda_1}(A)$. Si ha:

$$\mathbb{V}_{\lambda_1}(A) : (A - \lambda_1 I_4)X = 0 \text{ con } X = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \iff 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \iff x_2 = 2x_1 - x_3.$$

Segue che

$$\mathbb{V}_{\lambda_1}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ 2t - s \\ s \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, t, s \in \mathbb{R} \right\} =< v_1, v_2 >, \text{ dove } v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ e } v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Applichiamo Gram–Schmidt alla base (v_1, v_2) di $\mathbb{V}_{\lambda_1}(A)$:

- $w_1 := v_1$, $\langle w_1, w_1 \rangle_{\mathbb{R}^3} = 1^2 + 2^2 = 5$, $\|w_1\|_{\mathbb{R}^3} = \sqrt{\langle w_1, w_1 \rangle_{\mathbb{R}^3}} = \sqrt{5}$;
- $w_2 := v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle_{\mathbb{R}^3}}{\langle w_1, w_1 \rangle_{\mathbb{R}^3}} w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{5}\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ -\frac{1}{5} \\ 1 \end{pmatrix}$, $\langle w_2, w_2 \rangle_{\mathbb{R}^3} = \frac{6}{5}$, $\|w_2\|_{\mathbb{R}^3} = \sqrt{\frac{6}{5}}$;
- $\hat{w}_1 := \frac{w_1}{\|w_1\|_{\mathbb{R}^3}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\hat{w}_2 := \frac{w_2}{\|w_2\|_{\mathbb{R}^3}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{6}{5}}} \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ -\frac{1}{5} \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Segue che $(\hat{w}_1, \hat{w}_2)$ è una base ortonormale di $\mathbb{V}_{\lambda_1}(A)$.

Passiamo ora a $\mathbb{V}_{\lambda_2}(A)$. Risolvendo il sistema $(A - \lambda_2 I_3)X = 0$, otteniamo:

$$\mathbb{V}_{\lambda_2}(A) =< v_3 >, \quad \text{dove } v_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e quindi $\mathbb{V}_{\lambda_2}(A) =< \hat{w}_3 >$, dove

$$\hat{w}_3 := \frac{v_3}{\|v_3\|_{\mathbb{R}^3}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Segue che $\mathcal{O} := (\hat{w}_1, \hat{w}_2, \hat{w}_3)$ è una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ diagonalizzante (via similitudine) per A e, se $M \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ denota la matrice avente $\hat{w}_1, \hat{w}_2, \hat{w}_3$ come colonne, allora $M \in \mathrm{O}(3)$ e

$$D = \mathcal{M}_{\mathcal{O}}(L_A) = \left(\mathcal{M}_{\mathcal{C}_3,\mathcal{O}}(\mathbf{1}_{\mathbb{R}^3})\right)^{-1} \mathcal{M}_{\mathcal{C}_3}(L_A) \mathcal{M}_{\mathcal{C}_3,\mathcal{O}}(\mathbf{1}_{\mathbb{R}^3}) = M^{-1}AM = M^T AM, \quad \text{dove } D = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Osserviamo che

$$\det(M) = \frac{1}{30} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

Dunque, definendo Q come la matrice ottenuta cambiando segno alla prima colonna di M, si ha che $Q \in \mathrm{SO}(3)$ e $Q^T AQ = D$.

Consideriamo infine B. Osserviamo anzitutto che $B^H = -\mathrm{i}A$ e quindi B è normale essendo $B^H B = A^2 = BB^H$. Indichiamo con $P \in \mathrm{SU}_3(\mathbb{C})$ la matrice Q vista come matrice complessa. Vale:

$$P^H BP = Q^T(\mathrm{i}A)Q = \mathrm{i}Q^T AQ = \mathrm{i}D.$$

■

Esercizio 12.25. *Siano $A, B, C, D \in M_3(\mathbb{C})$ le seguenti matrici complesse:*

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{i}}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \mathrm{i} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{\mathrm{i}}{2} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & -\frac{\mathrm{i}}{2} \\ 0 & \frac{4}{3} & 0 \\ \frac{\mathrm{i}}{2} & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} & 0 \\ -\mathrm{i} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 4\mathrm{i} & 2 & 2 \\ -2 & 4\mathrm{i} & -2\mathrm{i} \\ -2 & -2\mathrm{i} & 4\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

Si dica se ciascuna matrice è unitariamente diagonalizzabile (o meglio unitariamente simile ad una matrice diagonale con elementi diagonali reali) e, in caso affermativo, si calcoli una base ortonormale di $\mathbb{C}^3$ diagonalizzante per l'operatore associato alla matrice stessa.

SOLUZIONE:

Le matrici A, B, C e D sono normali e quindi unitariamente digonalizzabili. Più precisamente, le matrici B e C sono hermitiane e quindi unitariamente simili a matrici diagonali con elementi diagonali reali. Si proceda ora come nella soluzione dell'Esercizio 12.22. ■

Esercizio 12.26. *Per ogni $z \in \mathbb{C}$, sia $A_z \in M_3(\mathbb{C})$ la seguente matrice:*

$$A_z = \begin{pmatrix} 2 & -2z & 2 \\ 2\mathrm{i} & -5z^2 & z^3 \\ 2 & -z^3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Si dica per quali valori di $z \in \mathbb{C}$ la matrice A_z è unitariamente simile ad una matrice diagonale con elementi diagonali reali e, per tali valori, si calcoli una matrice unitaria speciale $P \in \mathrm{SU}(3)$ tale che $P^H AP$ è diagonale.

SOLUZIONE:

A_z è hermitiana se e soltanto se $z = \mathrm{i}$. Si veda ora l'Esercizio 12.23. ■

Esercizio 12.27. *Per ogni $t \in \mathbb{C}$, sia $A_t \in M_2(\mathbb{C})$ la seguente matrice:*

$$A_t = \begin{pmatrix} 1-\mathrm{i} & 1-\mathrm{i} \\ -1+\mathrm{i} & t-\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

Si dica per quali valori di $t \in \mathbb{C}$ la matrice A_t è unitariamente diagonalizzabile. Inoltre, per tali valori di $t \in \mathbb{C}$, si calcoli una base ortonormale di $\mathbb{C}^2$ diagonalizzante per l'operatore lineare $L_{A_t} : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$ associato ad A_t e una matrice $P \in \mathrm{SU}(2)$ tale che $P^H A_t P$ è diagonale.

SOLUZIONE:

L'equazione $(A_t)^H A_t = A_t(A_t)^H$ in $t \in \mathbb{C}$ è verificata se e soltanto $t = 1$. Si veda ora l'Esercizio 12.21. ■

Diagonalizzazione di forme quadratiche e matrici simmetriche congruenti. Sia $\mathbb{K}$ un sottocampo di $\mathbb{C}$ (ad esempio $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$), sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ di dimensione finita n, sia $b : V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$ una forma bilineare simmetrica e sia $q : V \longrightarrow \mathbb{K}$ la forma quadratica associata a b (cioè $q(v) := b(v, v)$). Una base $\mathcal{C} = (v_1, \ldots, v_n)$ di $\mathbb{K}^n$ si dice *diagonalizzante per* b (o *diagonalizzante per* q) se la matrice $\mathbb{M}_{\mathcal{C}}(b) = (b(v_i, v_j))_{i,j}$ associata a b rispetto a $\mathcal{C}$ è una matrice diagonale o, equivalentemente, se esistono $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ tali che $q(v) = a_1x_1^2 + \ldots + a_nx_n^2$ per ogni $v \in V$, dove $[v]_{\mathcal{C}} = (x_1, \ldots, x_n)^T$. Se esiste una base diagonalizzante per b (risp. per q), allora si dice che b (risp. q) è *diagonalizzabile.*

Data una qualsiasi base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{K}^n$, vale la seguente uguaglianza:

$$\mathbb{M}_{\mathcal{B}}(b) = \big(\mathcal{M}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(\mathbf{1}_{\mathbb{K}^n})\big)^T \mathbb{M}_{\mathcal{C}}(b)\mathcal{M}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(\mathbf{1}_{\mathbb{K}^n}).$$

Segue che b (risp. q) è diagonalizzabile se e soltanto se $\mathbb{M}_{\mathcal{B}}(b)$ è congruente ad una matrice diagonale. Ricordiamo che, date due matrici $A, B \in M_n(\mathbb{K})$, B si dice *congruente ad* A se esiste $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tale che $B = M^TAM$. La relazione di congruenza è una relazione di equivalenza su $M_n(\mathbb{K})$.

Teorema (diagonalizzazione di f.b.s e f.q.). *Ogni forma bilineare simmetrica su V (risp. ogni forma quadratica su V) è diagonalizzabile.*

Nel CASO COMPLESSO possiamo essere più precisi:

Teorema (diagonalizzazione di f.b.s e f.q.: caso complesso). *Se $\mathbb{K}$ è algebricamente chiuso (ad esempio $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) e $b : V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$ è una forma bilineare simmetrica su V, allora esiste una base $\mathcal{C}$ di V diagonalizzante per b tale che*

$$\mathbb{M}_{\mathcal{C}}(b) = \left(\begin{array}{c|c} I_r & \mathbf{0}_1 \\ \hline \mathbf{0}_1^T & \mathbf{0}_2 \end{array}\right),$$

dove $r := \mathrm{rk}(b)$, $\mathbf{0}_1$ è la matrice nulla in $M_{r,n-r}(\mathbb{K})$ e $\mathbf{0}_2$ è la matrice nulla in $M_{n-r}(\mathbb{K})$. In coordinate rispetto alla base $\mathcal{C}$ di V, la forma quadratica $q : V \longrightarrow \mathbb{K}$ indotta da b assume la seguente espressione, detta forma canonica *di q:*

$$q(v) = z_1^2 + \ldots + z_r^2$$

per ogni $v \in V$, dove $(z_1, \ldots, z_r, z_{r+1}, \ldots, z_n)^T = [v]_{\mathcal{C}}$.

Equivalentemente, ogni matrice simmetrica in $M_n(\mathbb{K})$ (ad esempio complessa) di rango r è congruente alla seguente matrice

$$\left(\begin{array}{c|c} I_r & \mathbf{0}_1 \\ \hline \mathbf{0}_1^T & \mathbf{0}_2 \end{array}\right).$$

In particolare, due matrici simmetriche in $M_n(\mathbb{K})$ (ad esempio complesse) sono congruenti se e soltanto se hanno lo stesso rango.

Vediamo ora il CASO REALE.

Teorema (Sylvester). *Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione n, sia $b : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineare simmetrica su V di rango r e sia $q : V \longrightarrow \mathbb{R}$ la forma quadratica associata a b. Allora esistono una base $\mathcal{C}$ di V e due interi non–negativi p e s, dipendenti solo da b (e non da $\mathcal{C}$), tali che $p + s = r$ e*

$$\mathbb{M}_{\mathcal{C}}(b) = \left(\begin{array}{c|c|c} I_p & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & -I_s & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right).$$ [16]

In coordinate rispetto alla base $\mathcal{C}$ di V, la forma quadratica $q : V \longrightarrow \mathbb{R}$ assume la seguente espressione, detta forma canonica *di q:*

$$q(v) = x_1^2 + \ldots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \ldots - x_r^2$$

[16] Se $p = 0$ (e/o $s = 0$), allora il blocco "I_p" (e/o "$-I_s$") è omesso.

per ogni $v \in V$, *dove* $(x_1, \ldots, x_p, x_{p+1}, \ldots, x_r, x_{r+1}, \ldots, x_n)^T = [v]_C$. *L'intero* p *si dice* indice di positività di b (o di q), *l'intero* s *si dice* indice di negatività di b (o di q) *e la coppia* (p, s) *è detta* segnatura di b (o di q).

Equivalentemente, ogni matrice simmetrica reale in $M_n(\mathbb{R})$ *è congruente ad un'unica matrice della seguente forma*

$$\left(\begin{array}{c|c|c} I_p & 0 & 0 \\ \hline 0 & -I_s & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

In particolare, due matrici simmetriche reali in $M_n(\mathbb{R})$ *sono congruenti se e soltanto se le corrispondenti forme quadratiche hanno la stessa segnatura.*

Il seguente risultato segue subito dal teorema spettrale (caso reale).

Proposizione (calcolo della segnatura). *Sia* V *uno spazio vettoriale reale di dimensione finita* n, *sia* $q : V \longrightarrow \mathbb{R}$ *una forma quadratica su* V, *sia* $b : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ *la forma bilineare simmetrica polare di* q (*cioè* b *induce* q *ponendo* $q(v) = b(v, v)$) *e sia* A *la matrice associata a* b *rispetto a qualche fissata base di* V. *Allora l'indice di positività* (*risp. di negatività*) *di* q *è uguale al numero di radici positive* (*risp. negative*) *del polinomio caratteristico* P_A *di* A *contate con molteplicità.*

Un caso particolarmente interessante è quello in cui $V = \mathbb{R}^n$. Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$ una matrice simmetrica e sia $q_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ la forma quadratica associata ad A: $q_A(x) = x^T A x$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$. Indichiamo con C_n la base canonica di $\mathbb{R}^n$ e con $\beta_A : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ la forma bilineare simmetrica polare di q_A, che corrisponde alla forma bilineare simmetrica su $\mathbb{R}^n$ associata ad A: $\beta_A(x, y) = x^T A y$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$. Poiché $\mathbb{M}_{\mathsf{C}_n}(\beta_A) = A$, in questa situazione, la precedente proposizione assume la seguente forma:

Corollario. *Sia* $A \in M_n(\mathbb{R})$ *una matrice simmetrica e sia* $q_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *la forma quadratica associata ad* A. *Allora l'indice di positività* (*risp. di negatività*) *di* q_A *è uguale al numero di radici positive* (*risp. negative*) *di* P_A *contate con molteplicità.*

Per calcolare il numero di radici nulle, positive e negative di P_A contate con molteplicità si può (non si deve!!!) utilizzare il seguente risultato.

Teorema (Criterio di Cartesio). *Sia* $P(T) = a_n T^n + a_{n-1} T^{n-1} + \ldots + a_d T^d$ *un polinomio a coefficienti reali tali che* $a_n \neq 0$ *e* $a_d \neq 0$. *Supponiamo che* P *abbia tutte le radici reali* [17]. *Allora si ha:*

(i) d *è uguale al numero di radici nulle di* P *contate con molteplicità;*
(ii) *il numero di radici positive di* P *contate con molteplicità è uguale al numero* p *di variazioni di segno nella successione dei segni dei coefficienti non nulli di* P: segno(a_n) $\cdots$ segno(a_d);
(iii) *il numero di radici negative di* P *contate con molteplicità è uguale a* $n - d - p$.[18]

Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$ una matrice simmetrica, sia $\beta_A : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ la forma bilineare associata ad A ($\beta_A(x, y) = x^T A y$) e sia $q_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ la corrispondente forma quadratica ($q_A(x) = x^T A x$). Una procedura per calcolare una base diagonalizzante per q_A è la seguente.

(1) Si applica il teorema spettrale (caso reale) alla matrice A ottenendo una matrice $M \in \mathrm{O}(n)$ tale che $M^{-1}AM$ è uguale ad una matrice diagonale D. Siano $v_1, \ldots, v_n$ le colonne di M e sia $\mathcal{C} = (v_1, \ldots, v_n)$ la corrispondente base di $\mathbb{R}^n$. Poiché $M^{-1} = M^T$, si ha che $\mathcal{C}$ è anche diagonalizzante per q_A (o equivalentemente per β_A) e vale:

$$\mathbb{M}_{\mathcal{C}}(\beta_A) = \big(\mathcal{M}_{\mathsf{C}_n,\mathcal{C}}(\mathbf{1}_{\mathbb{R}^n})\big)^T \mathbb{M}_{\mathsf{C}_n}(\beta_A) \mathcal{M}_{\mathsf{C}_n,\mathcal{C}}(\mathbf{1}_{\mathbb{R}^n}) = M^T A M = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix},$$

dove $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sono gli autovalori (eventualmente ripetuti) di A. Dunque:

$$q(v) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \ldots + \lambda_n x_n^2$$

[17] Questa condizione è sempre verificata se P è il polinomio caratteristico di una matrice simmetrica reale.

[18] ATTENZIONE. In generale, il numero di radici negative di P contate con molteplicità NON è uguale al numero di "permanenze" di segno nella successione dei segni dei coefficienti non nulli di P. Ad esempio, se $P(T) = T^2 - 1$, allora la successione dei segni dei coefficienti non nulli di P è "$+\ -$", il numero di "permanenze" di segno è 0, mentre P possiede una radice negativa: $T = -1$.

per ogni $v \in \mathbb{R}^n$, dove $(x_1, \ldots, x_n)^T = [v]_{\mathcal{C}}$.

(2) Se si desidera portare q_A in forma canonica bisogna procedere come segue. Sia $r := \mathrm{rk}(A)$. A meno di riordinare gli elementi di $\mathcal{C}$, possiamo supporre che $\lambda_1 > 0, \ldots, \lambda_p > 0$, $\lambda_{p+1} < 0, \ldots, \lambda_r < 0$ per qualche p e $\lambda_{r+1} = \ldots = \lambda_n = 0$. Definiamo la base $\mathcal{C}' = (v'_1, \ldots, v'_n)$ di $\mathbb{R}^n$ ponendo:

$$\begin{cases} v'_j := \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} v_j & \text{se } j \in \{1, \ldots, p\}; \\ v'_j := \frac{1}{\sqrt{-\lambda_j}} v_j & \text{se } j \in \{p+1, \ldots, r\}; \\ v'_j := v_j & \text{se } j \in \{r+1, \ldots, n\}. \end{cases}$$

Osserviamo che $\beta_A(v'_i, v'_j) = 0$ se $i \neq j$ e

$$\begin{cases} \beta_A(v'_j, v'_j) = \frac{1}{\lambda_j} \beta_A(v_j, v_j) = 1 & \text{se } j \in \{1, \ldots, p\}; \\ \beta_A(v'_j, v'_j) = \frac{1}{-\lambda_j} \beta_A(v_j, v_j) = -1 & \text{se } j \in \{p+1, \ldots, r\}; \\ \beta_A(v'_j, v'_j) = \beta_A(v_j, v_j) = 0 & \text{se } j \in \{r+1, \ldots, n\}. \end{cases}$$

Segue che $\mathcal{C}'$ è la base cercata: $\mathcal{C}'$ è diagonalizzante per β_A e vale:

$$\mathbb{M}_{\mathcal{C}'}(\beta_A) = \left(\begin{array}{c|c|c} I_p & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & -I_s & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right).$$

Dunque, rispetto alla base $\mathcal{C}'$ di $\mathbb{R}^n$, q_A è in forma canonica:

$$q(v) = x_1^2 + \ldots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \ldots - x_r^2$$

per ogni $v \in \mathbb{R}^n$, dove $(x_1, \ldots, x_n)^T = [v]_{\mathcal{C}'}$.

Si osservi infine che, se $M' \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ è la matrice avente $v'_1, \ldots, v'_n$ come colonne, allora vale:

$$(M')^T A M' = \left(\mathcal{M}_{\mathcal{C}_n, \mathcal{C}'}(\mathbf{1}_{\mathbb{R}^n})\right)^T \mathbb{M}_{\mathcal{C}_n}(\beta_A) \mathcal{M}_{\mathcal{C}_n, \mathcal{C}'}(\mathbf{1}_{\mathbb{R}^n}) = \mathbb{M}_{\mathcal{C}'}(\beta_A) = \left(\begin{array}{c|c|c} I_p & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & -I_s & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right).$$

Un altro metodo per calcolare una base diagonalizzante per q_A, più semplice e valido su ogni sottocampo $\mathbb{K}$ di $\mathbb{C}$, è la **tecnica di completamento dei quadrati di Lagrange**. La vedremo nei seguenti tre esercizi svolti.

Esercizio 12.28. *Sia $q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ la seguente forma quadratica:*

$$q(x_1, x_2, x_3) := x_2^2 - 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

Si risponda ai seguenti quesiti:

(i) *Si calcoli $\mathrm{rk}(q)$ e si scriva l'espressione polinomiale della forma bilineare simmetrica polare di q.*

(ii) *Si calcoli la segnatura di q e una base di $\mathbb{R}^3$ diagonalizzante per q.*

(iii) *Si calcoli una forma quadratica $Q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ in forma canonica (cioè $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + \ldots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \ldots - x_r^2$ per qualche $0 \leq p \leq r \leq 3$) e un automorfismo lineare $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ di $\mathbb{R}^3$ tale che $q = Q \circ \varphi$, cioè tale che il seguente diagramma commuta:*

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^3 \arrow[r, "q"] \arrow[d, "\varphi"'] & \mathbb{R} \\ \mathbb{R}^3 \arrow[ur, "Q"'] & \end{tikzcd} .$$

SOLUZIONE:

(i) Osserviamo anzitutto che q è la forma quadratica su $\mathbb{R}^3$ associata alla seguente matrice simmetrica $A \in M_3(\mathbb{R})$:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Poiché il minore principale di testa di A di ordine 2 è $-1 \neq 0$ e $\det(A) = 0$, segue che $\mathrm{rk}(q) = \mathrm{rk}(A) = 2$. Dunque q è una forma quadratica degenere. La forma bilineare simmetrica polare β_A di q ha la seguente espressione:

$$\beta_A(x, y) = x^T A y = x_1y_2 + 3x_1y_3 + x_2y_1 + x_2y_2 + x_2y_3 + 3x_3y_1 + x_3y_2 - 3x_3y_3,$$

dove $x = (x_1, x_2, x_3)^T, y = (y_1, y_2, y_3)^T \in \mathbb{R}^3$.

(ii) Si ha: $P_A(T) = -T^3 - 2T^2 + 14T$. La successione dei segni dei coefficienti non nulli di P_A è uguale a "$-\ -\ +$". Tale successione contiene una sola variazione di segno. Dal criterio di Cartesio segue che P_A possiede: una sola radice nulla, una sola radice positiva e $3 - 1 - 1 = 1$ radice negativa. La segnatura di q è $(1, 1)$ e quindi A è congruente alla seguente matrice:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo ora una base di $\mathbb{R}^3$ diagonalizzante per q utilizzando la TECNICA DI COMPLETAMENTO DEI QUADRATI DI LAGRANGE. Completiamo i quadrati di q prima rispetto a x_2 e poi rispetto a x_1:

$$\begin{aligned} q(x_1, x_2, x_3) =& \boldsymbol{x_2^2} - 3x_3^2 + \boldsymbol{2x_1x_2} + 6x_1x_3 + \boldsymbol{2x_2x_3} = \\ =& \boldsymbol{(\underline{x_2} + x_1 + x_3)^2 - x_1^2 - x_3^2 - 2x_1x_3} - 3x_3^2 + 6x_1x_3 = \\ =& (\underline{x_2} + x_1 + x_3)^2 \boldsymbol{-x_1^2} -4x_3^2 + \boldsymbol{4x_1x_3} = (\underline{x_2} + x_1 + x_3)^2 \boldsymbol{-(\underline{x_1} - 2x_3)^2 + 4x_3^2} -4x_3^2 = \\ =& (\underline{x_2} + x_1 + x_3)^2 - (\underline{x_1} - 2x_3)^2. \end{aligned}$$

Eseguiamo il seguente cambiamento "formale" di variabili:

$$\begin{cases} y_1 = \underline{x_2} + x_1 + x_3 = x_1 + x_2 + x_3 \\ y_2 = \underline{x_1} - 2x_3 \\ y_3 = \underline{x_3} \end{cases}$$

o, equivalentemente,

$$y = Mx \ \text{ con } M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R}).$$

Vale:

$$x^T Ax = q(x) = y_1^2 - y_2^2 = y^T Dy = (Mx)^T D(Mx) = x^T M^T DMx$$

per ogni $x \in \mathbb{R}^3$. In altre parole, si ha che $A = M^T DM$ (vedi nota [19]) o, equivalentemente, $(M^{-1})^T A(M^{-1}) = D$. Segue che le colonne di M^{-1} formano una base diagonalizzante per q. Poiché si ha

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R}),$$

i vettori $v_1 := (0, 1, 0)^T$, $v_2 := (1, -1, 0)^T$ e $v_3 = (2, -3, 1)$ formano una base diagonalizzante per q. Si osservi infatti che $\beta_A(v_i, v_j) = 0$ se $i \neq j$, $\beta_A(v_1, v_1) = 1$, $\beta_A(v_2, v_2) = -1$ e $\beta_A(v_3, v_3) = 0$.

(iii) Basta porre $Q(y) := y_1^2 - y_2^2 = y^T Dy$ per ogni $y \in \mathbb{R}^3$ e $\varphi(x) := Mx$ per ogni $x \in \mathbb{R}^3$, dove M è la matrice definita sopra. Infatti come abbiamo visto al punto (ii), vale:

$$(Q \circ \varphi)(x) = Q(\varphi(x)) = Q(Mx) = (Mx)^T D(Mx) = x^T M^T DMx = x^T Ax = q(x)$$

per ogni $x \in \mathbb{R}^3$. ■

Esercizio 12.29 (Esercizio precedente su $\mathbb{C}$). *Sia $q : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}$ la seguente forma quadratica complessa:*

$$q(x_1, x_2, x_3) := x_2^2 - 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

Si risponda ai seguenti quesiti:

(i) *Si calcoli* $\mathrm{rk}(q)$ *e si scriva l'espressione polinomiale della forma bilineare simmetrica polare di q.*

(ii) *Si calcoli una base di $\mathbb{C}^3$ diagonalizzante per q.*

(iii) *Si calcoli una forma quadratica $Q : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}$ in forma canonica (cioè $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + \ldots + x_r^2$ per qualche $0 \leq r \leq 3$) e un automorfismo lineare $\varphi : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3$ di $\mathbb{C}^3$ tale che $q = Q \circ \varphi$, cioè tale che il seguente diagramma commuta:*

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}^3 \arrow[r, "q"] \arrow[d, "\varphi"'] & \mathbb{C} \\ \mathbb{C}^3 \arrow[ur, "Q"'] & \end{tikzcd}.$$

[19] Si ricordi che, se A e B sono due matrici simmetriche in $M_n(\mathbb{K})$ (dove $\mathbb{K}$ è un sottocampo di $\mathbb{C}$) tali che $x^T Ax = x^T Bx$ per ogni $x \in \mathbb{K}^n$, allora $A = B$. Infatti, utilizzando la formula di polarizzazione, si ottiene: $x^T Ay = \frac{1}{2}((x + y)^T A(x + y) - x^T Ax - y^T Ay) = \frac{1}{2}((x + y)^T B(x + y) - x^T Bx - y^T By) = x^T By$ per ogni $x, y \in \mathbb{K}^n$. Ora sostituendo a x e y i vettori della base canonica di $\mathbb{K}^n$ deduciamo che A e B hanno gli stessi elementi, cioè sono uguali.

SOLUZIONE:

La risposta al primo quesito è identica al caso reale. Inoltre i vettori v_1, v_2 e v_3 definiti al punto (ii), visti come vettori di $\mathbb{C}^3$, formano una base $\mathcal{C}$ di $\mathbb{C}^3$ diagonalizzante per q. Tuttavia q non è in "forma canonica complessa" rispetto a tale base:

$$q(v) = y_1^2 - y_2^2$$

per ogni $v \in \mathbb{C}^3$, dove $(y_1, y_2, y_3)^T = [v]_{\mathcal{C}}$. Se si desidera una base che rilegga q in forma canonica dobbiamo aggiungere un passaggio alla tecnica di completamento dei quadrati. Infatti abbiamo visto sopra che: $q(x_1, x_2, x_3) = (\underline{x_2} + x_1 + x_3)^2 - (\underline{x_1} - 2x_3)^2$. Basta portare "$-1$" dentro il secondo quadrato:

$$q(x_1, x_2, x_3) = (\underline{x_2} + x_1 + x_3)^2 + (\mathrm{i}\underline{x_1} - 2\mathrm{i}x_3)^2.$$

Possiamo ora ripetere i ragionamenti fatti nel precedente esercizio. Definiamo la matrice

$$M' := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \mathrm{i} & 0 & -2\mathrm{i} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{C}).$$

Allora le colonne della matrice $(M')^{-1}$ formano una base $\mathcal{C}'$ di $\mathbb{C}^3$ diagonalizzante per q, che rilegge q stessa in "forma canonica complessa":

$$q(v) = z_1^2 + z_2^2$$

per ogni $v \in \mathbb{C}^3$, dove $z = (z_1, z_2, z_3)^T = [v]_{\mathcal{C}'}$. Infine, posto $Q(y) = z_1^2 + z_2^2$ per ogni $z \in \mathbb{C}^3$ e $\varphi(x) := M'x$, si ha che $q = Q \circ \varphi$. ■

Esercizio 12.30. *Si calcoli una base di $\mathbb{R}^3$ diagonalizzante per la seguente forma quadratica $q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$:*

$$q(x_1, x_2, x_3) := x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3.$$

Si calcoli inoltre la segnatura di q.

SOLUZIONE:

Procediamo con la tecnica di completamento dei quadrati. Non essendo presenti monomi del tipo ax_j^2 possiamo procedere col segue cambiamento "formale" di variabili:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = x_3 \end{cases}.$$

Poiché $x_1 = y_1 - y_2$, $x_2 = y_2$ e $x_3 = y_3$, si ottiene:

$$q(x_1, x_2, x_3) = (y_1 - y_2)y_2 + (y_1 - y_2)y_3 + y_2y_3 = y_1y_2 - y_2^2 + y_1y_3.$$

Completiamo i quadrati rispetto a y_2 e y_1:

$$\begin{aligned} q(x_1, x_2, x_3) &= \boldsymbol{y_1y_2 - y_2^2} + y_1y_3 = -\left(\underline{\boldsymbol{y_2}} - \frac{\boldsymbol{y_1}}{\boldsymbol{2}}\right)^{\boldsymbol{2}} + \frac{\boldsymbol{y_1^2}}{\boldsymbol{4}} + y_1y_3 = \\ &= -\left(\underline{y_2} - \frac{y_1}{2}\right)^2 + \frac{\boldsymbol{y_1^2}}{\boldsymbol{4}} + \boldsymbol{y_1y_3} = \\ &= -\left(\underline{y_2} - \frac{y_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\boldsymbol{y_1}}{\underline{\boldsymbol{2}}} + \boldsymbol{y_3}\right)^{\boldsymbol{2}} - \boldsymbol{y_3^2}. \end{aligned}$$

Poniamo

$$\begin{cases} z_1 = \frac{y_1}{2} + y_3 = \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2} + x_3 \\ z_2 = y_2 - \frac{y_1}{2} = -\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2} \\ z_3 = y_3 = x_3 \end{cases}$$

ovvero $z = Mx$ se $z = (z_1, z_2, z_3)^T$, $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ e

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R}).$$

Osserviamo che

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le colonne $v_1 = (1,1,0)^T$, $v_2 = (-1,1,0)^T$ e $v_3 = (-1,-1,1)^T$ di M^{-1} formano una base $\mathcal{C}$ di $\mathbb{R}^3$ diagonalizzante per q (vedi la soluzione dell'Esercizio 12.27), che rilegge q stesso in forma canonica:

$$q(v) = z_1^2 - z_2^2 - z_3^2$$

per ogni $v \in \mathbb{C}^3$, dove $(z_1, z_2, z_3)^T = [v]_{\mathcal{C}}$. La segnatura di q è dunque $(1,2)$. ■

Esercizio 12.31. *Per ogni $k \in \mathbb{R}$, definiamo la forma quadratica $q_k : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ ponendo*

$$q_k(x_1, x_2) := kx_1^2 + x_2^2 - 2kx_1x_2.$$

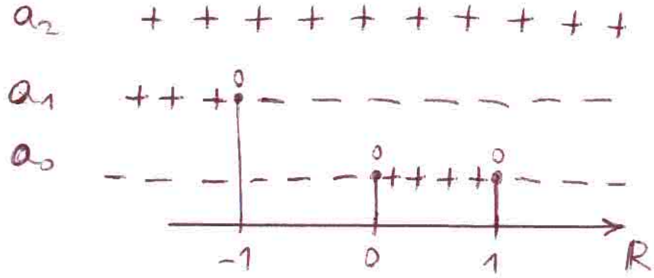
Si scriva la forma canonica di q_k al variare di $k \in \mathbb{R}$ e sia dica per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la forma quadratica q_k è un prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$. [20]

Soluzione:

Primo modo. Sia $k \in \mathbb{R}$. Definiamo la matrice $A_k \in M_2(\mathbb{R})$ ponendo:

$$A_k := \begin{pmatrix} k & -k \\ -k & 1 \end{pmatrix}.$$

La forma quadratica q_k coincide con la forma quadratica associata ad A_k. Il polinomio caratteristico di A_k è uguale a $P_{A_k}(T) = T^2 - (k+1)T + k - k^2$. Studiamo il segno dei coefficienti $a_2 := 1$, $a_1 := -(k+1)$ e $a_0 = k - k^2$ di P_{A_k} al variare di $k \in \mathbb{R}$:



Applichiamo ora il criterio di Cartesio, calcoliamo la segnatura $\mathrm{sgn}(q_k)$ di q_k e scriviamo quindi la forma canonica Q_k di q_k:

- $\underline{k < -1}$: $a_0 \neq 0$, "$+\ +\ -$" [21] $\Longrightarrow \mathrm{sgn}(q_k) = (1,1)$ e $Q_k(y_1, y_2) = y_1^2 - y_2^2$.
- $\underline{k = -1}$: $a_0 \neq 0$, "$+\ -$" $\Longrightarrow \mathrm{sgn}(q_k) = (1,1)$ e $Q_k(y_1, y_2) = y_1^2 - y_2^2$.
- $\underline{k \in (-1,0)}$: $a_0 \neq 0$, "$+\ -\ -$" $\Longrightarrow \mathrm{sgn}(q_k) = (1,1)$ e $Q_k(y_1, y_2) = y_1^2 - y_2^2$.
- $\underline{k = 0}$: $a_0 = 0$, $a_1 \neq 0$, "$+\ -$" $\Longrightarrow \mathrm{sgn}(q_k) = (1,0)$ e $Q_k(y_1, y_2) = y_1^2$.
- $\underline{k \in (0,1)}$: $a_0 \neq 0$, "$+\ -\ +$" $\Longrightarrow \mathrm{sgn}(q_k) = (2,0)$ e $Q_k(y_1, y_2) = y_1^2 + y_2^2$.
- $\underline{k = 1}$: $a_0 = 0$, $a_1 \neq 0$, "$+\ -$" $\Longrightarrow \mathrm{sgn}(q_k) = (1,0)$ e $Q_k(y_1, y_2) = y_1^2$.
- $\underline{k > 1}$: $a_0 \neq 0$, "$+\ -\ -$" $\Longrightarrow \mathrm{sgn}(q_k) = (1,1)$ e $Q_k(y_1, y_2) = y_1^2 - y_2^2$.

Segue che q_k è un prodotto scalare se e soltanto se $k \in (0,1)$.

Secondo modo. Completiamo i quadrati di q_k rispetto a x_2:

$$q_k(x_1, x_2) = kx_1^2 + \boldsymbol{x_2^2 - 2kx_1x_2} = kx_1^2 + \boldsymbol{(\underline{x_2} - kx_1)^2 - k^2x_1^2} = (x_2 - kx_1)^2 + (k - k^2)x_1^2.$$

Si distinguono i seguenti casi:

- Supponiamo che $k - k^2 > 0$ ovvero $\underline{k \in (0,1)}$. Ponendo

$$\begin{cases} y_1 = x_2 - kx_1 \\ y_2 = x_1\sqrt{k - k^2} \end{cases},$$

  otteniamo che la forma canonica Q_k di q_k è la seguente: $Q_k(y_1, y_2) = y_1^2 + y_2^2$ [22]. In questo caso q_k ha segnatura $(2,0)$ e quindi q_k è un prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$.

---

[20] Un prodotto scalare è una forma quadratica definita positiva.

[21] Questa è la successione dei segni dei coefficienti non nulli di P_{A_k}.

[22] Si noti che $(y_1, y_2)^T = \begin{pmatrix} -k & 1 \\ \sqrt{k-k^2} & 0 \end{pmatrix} (x_1, x_2)^T$ e la matrice $\begin{pmatrix} -k & 1 \\ \sqrt{k-k^2} & 0 \end{pmatrix}$ è invertibile.

- Supponiamo che $k - k^2 = 0$ ovvero $\underline{k \in \{0,1\}}$. Ponendo
$$\begin{cases} y_1 = x_2 - kx_1 \\ y_2 = x_1 \end{cases},$$
otteniamo che $Q_k(y_1, y_2) = y_1^2$. In questo caso q_k ha segnatura $(1,0)$.
- Supponiamo che $k - k^2 < 0$ ovvero $\underline{k \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)}$. Ponendo
$$\begin{cases} y_1 = x_2 - kx_1 \\ y_2 = x_1\sqrt{-k+k^2} \end{cases},$$
otteniamo che $Q_k(y_1, y_2) = y_1^2 - y_2^2$. In questo caso q_k ha segnatura $(1,1)$.

■

Esercizio 12.32. *Siano A e B le seguenti matrici simmetriche reali in $M_3(\mathbb{R})$:*
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \quad e \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Si risponda ai seguenti quesiti:

(i) *Si calcoli la segnatura della forma quadratica associata ad A e si determini una matrice $M_1 \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ tale che $M_1^T A M_1$ sia diagonale.*

(ii) *Si calcoli la segnatura della forma quadratica associata ad B e si determini una matrice $M_2 \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ tale che $M_2^T B M_2$ sia diagonale.*

(iii) *Si dimostri che A e B sono congruenti determinando una matrice $M_3 \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ tale che $B = M_3^T A M_3$.*

SOLUZIONE:

(i) Siano $q_A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ e $q_B : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ le forme quadratiche associate ad A e a B, rispettivamente: $q_A(x) = x^T A x$ e $q_B(x) = x^T B x$ per ogni $x \in \mathbb{R}^3$.

Completando i quadrati di q_A, prima rispetto a x_1 e poi rispetto a x_2, otteniamo:
$$q_A(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 - 2x_3)^2 - x_3^2.$$
Poniamo
$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 \\ y_2 = x_2 - 2x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases}$$
ovvero $y = N_1 x$ se $y = (y_1, y_2, y_3)^T$, $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ e
$$N_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R}).$$
Definiamo D e M_1 in $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ ponendo:
$$D := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad e \quad M_1 := N_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Vale:
$$x^T A x = q_A(x) = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 = y^T D y = (N_1 x)^T D (N_1 x) = x^T N_1^T D N_1 x$$
per ogni $x \in \mathbb{R}^3$. In altre parole, si ha che $A = N_1^T D N_1$ o, equivalentemente, $M_1^T A M_1 = D$ come desiderato.

(ii) Completiamo ora i quadrati di q_B, prima rispetto a x_2 e poi rispetto a x_1 ottenendo:
$$q_B(x_1, x_2, x_3) = (x_2 - x_1)^2 - (x_1 + x_3)^2 + x_3^2.$$
Poniamo
$$\begin{cases} z_1 = x_2 - x_1 \\ z_2 = x_3 \\ z_3 = x_1 + x_3 \end{cases}$$
ovvero $z = N_2 x$ se $z = (z_1, z_2, z_3)^T$ e
$$N_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R}).$$

Definiamo $M_2 \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ ponendo:

$$M_2 := N_2^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vale:

$$x^T Bx = q_B(x) = z_1^2 + z_2^2 - z_3^2 = z^T Dz = (N_2x)^T D(N_2x) = x^T N_2^T DN_2 x$$

per ogni $x \in \mathbb{R}^3$. In altre parole, si ha che $B = N_2^T DN_2$ o, equivalentemente, $M_2^T BM_2 = D$.

(iii) Poiché $M_2^T BM_2 = D = M_1^T AM_1$, si ha che $B = (M_2^{-1})^T (M_1^T AM_1) M_2^{-1} = (M_1 M_2^{-1})^T A (M_1 M_2^{-1})$. In particolare, A e B sono congruenti. Dunque la matrice

$$M_3 := M_1 M_2^{-1} = M_1 N_2 = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ha la proprietà desiderata. ■

Esercizio 12.33. *Per ogni $t \in \mathbb{R}$, si calcoli la segnatura delle forme quadratiche $q_t : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ e $Q_t : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definite ponendo:*

$$q_t(x_1, x_2, x_3) := tx_1^2 + 2x_1x_2 - 2tx_2x_3 - x_3^2$$

e

$$Q_t(x_1, x_2, x_3) := tx_2^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_3^2.$$

Si calcolino inoltre una base di $\mathbb{R}^3$ diagonalizzante per q_1 e una base di $\mathbb{R}^4$ diagonalizzante per Q_1.

Soluzione:

Per ogni $t \in \mathbb{R}$ sia $\mathrm{sgn}(q_t)$ la segnatura di q_t e $\mathrm{sgn}(Q_t)$ quella di Q_t. Procedendo come nella Soluzione dell'Esercizio 12.31 otteniamo:

$$\mathrm{sgn}(q_t) = \begin{cases} (1,2) & \text{se } t < 1 \\ (1,1) & \text{se } t = 1 \\ (2,1) & \text{se } t > 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad \mathrm{sgn}(Q_t) = \begin{cases} (1,2) & \text{se } t < -1 \\ (1,1) & \text{se } t = -1 \\ (2,1) & \text{se } t > -1 \end{cases}$$

Per il calcolo di una base diagonalizzante per q_1 e per Q_1 si veda la soluzione al quesito (ii) dell'Esercizio 12.27. ■

Esercizio 12.34. *Sia dica se le seguenti matrici $A, B \in M_5(\mathbb{R})$ sono congruenti:*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soluzione:

Entrambe le forme quadratiche associate alle matrici A e B hanno segnatura $(2,1)$, dunque A e B sono congruenti. ■

Somma e intersezione di sottospazi vettoriali, proiezioni ortogonali. Sia V uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$ di dimensione finita n e siano U e W due sottospazi vettoriali di V. Supponiamo siano noti:

- una base $(u_1, \ldots, u_t)$ di U e un sistema di equazioni cartesiane $AX = 0$ per U (cioè $A \in M_{r,n}(\mathbb{K})$ per qualche r, $X = (x_1, \ldots, x_n)^T$ e $U = \mathrm{Sol}(AX = 0)$);
- una base $(w_1, \ldots, w_s)$ di W e un sistema di equazioni cartesiane $BX = 0$ per W.

Consideriamo il seguente esercizio:

Esercizio. *Calcolare una base e un sistema di equazioni cartesiane per i sottospazi vettoriali $U + W$ e $U \cap W$ di V.*

Soluzione:

La somma $U + W$ è generata dai vettori $u_1, \ldots, u_t, w_1, \ldots, w_s$. Si può dunque estrarre una base di $U + W$ da $(u_1, \ldots, u_t, w_1, \ldots, w_s)$ applicando il principio dei minori orlati (vedi Esercizio 9.17 del "Foglio 9 di esercizi"). Utilizzando ancora il principio dei minori orlati assieme alla base di $U+W$ appena calcolata, si può scrivere un sistema di equazioni cartesiane per $U+W$ (vedi la parte finale del "Foglio 9 di esercizi").

Un sistema di equazioni cartesiane per $U\cap W$ è facile da scrivere: basta mettere a sistema sia le equazioni cartesiane di U che quelle di W. In simboli si ha:

$$U\cap W = \mathrm{Sol}\left(\left\{\begin{array}{l} AX=0 \\ BX=0 \end{array}\right)\right..$$

Una base di $U\cap W$ si può ora ottenere risolvendo il suddetto sistema. ■

Esercizio 12.35. *Siano U e W due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$ tali che*

$$U =< u_1, u_2, u_3 > \ \textit{con}\ u_1=(1,0,-1,1)^T, u_2=(1,0,3,2)^T \ \textit{e}\ u_3=(1,0,-13,-2)^T,$$

e

$$W =< w_1, w_2, w_3, w_4 > \ \textit{con}\ w_1=(2,0,2,3)^T, w_2=(0,1,0,0)^T, w_3=(1,0,0,1)^T \ \textit{e}\ w_4=(1,-1,2,2)^T,$$

Si risponda ai seguenti quesiti:

(i) *Si calcolino: una base di U, una base di W, equazioni cartesiane per U ed equazioni cartesiane per W.*

(ii) *Si calcolino: equazioni cartesiane di $U\cap W$, una base di $U\cap W$ e una base di $U+W$.*

(iii) *Equipaggiamo $\mathbb{R}^4$ con il prodotto scalare stabdard $\langle x,y\rangle_{\mathbb{R}^4}=x^Ty$. Sia $P=(2,2,2,3)^T$. Si calcolino: la proiezione ortogonale di P su U, la distanza tra P e U* [23]*, la proiezione ortogonale di P su W e la distanza tra P e W. Si calcolino infine: equazioni cartesiane per $U^\perp$, una base per $U^\perp$, equazioni cartesiane per $W^\perp$ e una base per $W^\perp$.*

SOLUZIONE:

(i) (u_1,u_2) è una base di U e quindi $\dim_{\mathbb{R}}(U)=2$. (w_1,w_2,w_3) è una base di W e quindi $\dim_{\mathbb{R}}(W)=3$. Possibili equazioni cartesiane per U sono le seguenti:

$$\left\{\begin{array}{l} x_2=0 \\ -5x_1-x_3+4x_4=0 \end{array}\right.$$

Un'equazione cartesiana per W è la seguente: $2x_1+x_3-2x_4=0$

(ii) Ecco delle equazioni cartesiane per $U\cap W$:

$$\left\{\begin{array}{l} x_2=0 \\ -5x_1-x_3+4x_4=0 \\ 2x_1+x_3-2x_4=0 \end{array}\right. .$$

Risolvendo il precendente sistema si ottiene che $U\cap W =< (2,0,2,3)^T >$ e quindi $\dim_{\mathbb{R}}(U\cap W)=1$. Grazie alla formula di Grassmann, si ha che $\dim_{\mathbb{R}}(U+W)=2+3-1=4$. Segue che $U+W=\mathbb{R}^4$. Possiamo dunque scegliere la base canonica di $\mathbb{R}^4$ come base di $U+W$.

(iii) Calcoliamo la proiezione ortogonale P_U di P su U. Poiché $\langle u_1,u_2\rangle_{\mathbb{R}^4}=0$, vale:

$$P_U=\frac{\langle P,u_1\rangle_{\mathbb{R}^4}}{\langle u_1,u_1\rangle_{\mathbb{R}^4}}u_1+\frac{\langle P,u_2\rangle_{\mathbb{R}^4}}{\langle u_2,u_2\rangle_{\mathbb{R}^4}}u_2=(2,0,2,3)^T.$$

Un'altro modo per calcolare P_U è il seguente. Poniamo $P_U=tu_1+su_2$ con $t,s\in\mathbb{R}$ (t e s sono incognite). Allora t e s soddisfano il seguente sistema:

$$\left\{\begin{array}{l} \langle u_1, P-(tu_1+su_2)\rangle_{\mathbb{R}^4}=0 \\ \langle u_2, P-(tu_1+su_2)\rangle_{\mathbb{R}^4}=0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} t\langle u_1,u_1\rangle_{\mathbb{R}^4}+s\langle u_1,u_2\rangle_{\mathbb{R}^4}=\langle u_1,P\rangle_{\mathbb{R}^4} \\ t\langle u_2,u_1\rangle_{\mathbb{R}^4}+s\langle u_2,u_2\rangle_{\mathbb{R}^4}=\langle u_2,P\rangle_{\mathbb{R}^4} \end{array}\right. .$$

Risolvendo si ottiene $t=s=1$ e quindi $P_U=(2,0,2,3)^T$. La distanza tra P e U è uguale a $\|P-P_U\|_{\mathbb{R}^4}=2$.

Poiché $P\in W$, la proiezione ortogonale di P su W è P stesso e quindi la distanza tra P e W è nulla.

Scriviamo ora un sistema di equazioni per $U^\perp$:

$$U^\perp : \left\{\begin{array}{l} \langle u_1,(x_1,x_2,x_3,x_4)^T\rangle_{\mathbb{R}^4}=0 \\ \langle u_2,(x_1,x_2,x_3,x_4)^T\rangle_{\mathbb{R}^4}=0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x_1-x_3+x_4=0 \\ x_1+3x_3+2x_4=0 \end{array}\right.$$

Risolvendo tale sistema si ottiene una base di $U^\perp$.

Calcoliamo ora $W^\perp$. Poniamo $N:=(2,0,1,-2)^T$. Osserviamo che l'equazione cartesiana $2x_1+x_3-2x_4=0$ per W, si può scrivere come segue: $\langle N,(x_1,x_2,x_3,x_4)^T\rangle_{\mathbb{R}^4}=0$. Quindi (N) è una base di $W^\perp$. Tre equazioni cartesiane per la retta $W^\perp$ di $\mathbb{R}^4$ si possono ottenere utilizzando il principio dei minori orlati (vedi "Foglio 9 degli esercizi"). Il vettore N è detto *vettore normale* all'iperpiano W di $\mathbb{R}^4$. ■

[23] Se P_U è la proiezione ortogonale di P su U, allora la distanza tra P e U è uguale a $\|P-P_U\|_{\mathbb{R}^4}$.