CORSI DI LAUREA IN MATEMATICA E FISICA

FOGLIO DI ESERCIZI # 9– GEOMETRIA 1

Esercizio 9.1. *Sia n un intero ≥ 2. Si dimostri che, per ogni campo $\mathbb{K}$, la seguente affermazione è verificata: se $A = (a_{ij})_{i,j} \in M_n(\mathbb{K})$ ha due righe (risp. colonne) uguali, allora $\det(A) = 0$.*

SOLUZIONE:

Poiché $\det(A^T) = \det(A)$, è sufficiente dimostrare l'asserto nel caso in cui A abbia due righe uguali. Siano dunque $r, s \in \{1, \ldots, n\}$ tali che $r < s$ e le righe $A^{(r)}$ e $A^{(s)}$ di A coincidono, cioè $a_{r\ell} = a_{s\ell}$ per ogni $\ell \in \{1, \ldots, n\}$. Per ogni $p \in \sigma_n$, indichiamo con T_p la trasposizione di $\{1, \ldots, n\}$ che scambia tra loro $p(r)$ e $p(s)$. Definiamo:

$$L := \{p \in \sigma_n \,|\, p(r) < p(s)\} \text{ e } L^* := \{p \in \sigma_n \,|\, p(s) < p(r)\}.$$

Evidentemente, $\sigma_n = L \sqcup L^*$ e l'applicazione $\Psi : L \longrightarrow L^*$, definita ponendo $\Psi(p) := T_p \circ p$, è una bigezione (si verifichi che Ψ è ben definita e che $\Psi^{-1}(q) := T_q \circ q$ per ogni $q \in L^*$). Per semplicità, poniamo $p^* = \Psi(p)$ per ogni $p \in L$. Osserviamo che, per ogni $p \in \sigma_n$, valgono:

$$a_{r,p(r)} = a_{s,p(r)} = a_{s,p^*(s)}, \quad a_{s,p(s)} = a_{r,p(s)} = a_{r,p^*(r)}$$

e

$$a_{i,p(i)} = a_{i,p^*(i)} \text{ per ogni } i \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{p(r), p(s)\}.$$

Segue che:

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \sum_{p \in L} \epsilon(p) a_{1,p(1)} \cdots a_{r-1,p(r-1)} a_{r,p(r)} a_{r+1,p(r+1)} \cdots a_{s-1,p(s-1)} a_{s,p(s)} a_{s+1,p(s+1)} \cdots a_{n,p(n)} + \\
&\quad + \sum_{q \in L^*} \epsilon(q) a_{1,q(1)} \cdots a_{n,q(n)} = \\
&= \sum_{p \in L} \epsilon(T_p \circ T_p \circ p) a_{1,p^*(1)} \cdots a_{r-1,p^*(r-1)} a_{s,p^*(s)} a_{r+1,p^*(r+1)} \cdots a_{s-1,p^*(s-1)} a_{r,p^*(r)} a_{s+1,p^*(s+1)} \cdots a_{n,p^*(n)} + \\
&\quad + \sum_{q \in L^*} \epsilon(q) a_{1,q(1)} \cdots a_{n,q(n)} = \\
&= \sum_{p \in L} \epsilon(T_p) \epsilon(p^*) a_{1,p^*(1)} \cdots a_{r-1,p^*(r-1)} a_{r,p^*(r)} a_{r+1,p^*(r+1)} \cdots a_{s-1,p^*(s-1)} a_{s,p^*(s)} a_{s+1,p^*(s+1)} \cdots a_{n,p^*(n)} + \\
&\quad + \sum_{q \in L^*} \epsilon(q) a_{1,q(1)} \cdots a_{n,q(n)} = \\
&= -\sum_{p \in L} \epsilon(p^*) a_{1,p^*(1)} \cdots a_{n,p^*(n)} + \sum_{q \in L^*} \epsilon(q) a_{1,q(1)} \cdots a_{n,q(n)} = [\text{ponendo } q := p^* \text{ nella prima sommatoria}] \\
&= -\sum_{q \in L^*} \epsilon(q) a_{1,q(1)} \cdots a_{n,q(n)} + \sum_{q \in L^*} \epsilon(q) a_{1,q(1)} \cdots a_{n,q(n)} = 0.
\end{aligned}$$

■

Esercizio 9.2. *Sia n un intero positivo. Si dimostri che, per ogni campo $\mathbb{K}$, vale la seguente formula di Binet: per ogni $A, B \in M_n(\mathbb{K})$, si ha $\det(AB) = \det(A)\det(B)$. Inoltre, se A è invertibile, allora $\det(A) \neq 0$ e $\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$.*

SOLUZIONE:

Ripeti la dimostrazione di Corollario 6.3 a p. 79 di Sernesi usando l'Esercizio 9.1. ■

Esercizio 9.3. *Sia n un intero positivo. Si dimostri che, per ogni campo $\mathbb{K}$, la funzione $\det : M_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$ è l'unica funzione $f : M_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$ ad avere le seguenti tre proprietà:*

- $(D1)$ *f è multilineare sulle righe.*
- $(D2')$ *Se $A \in M_n(\mathbb{K})$ possiede due righe uguali, allora $f(A) = 0$.*
- $(D3)$ *$f(I_n) = 1$.*

SOLUZIONE:

Ripeti la dimostrazione di Corollario 6.3 a p. 79 di Sernesi con "det"$= f$ e "B"$= I_n$.[1] ■

Esercizio 9.4. *Sia n un intero positivo e sia $\mathbb{K}$ un campo arbitrario. Si dimotri che, se una funzione $f : M_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$ soddisfa le proprietà $(D1)$ e $(D2')$ enunciate nel precedente esercizio, allora f è alternante sulle righe, ovvero vale:*

$(D2)$ *Se la matrice B è ottenuta da $A \in M_n(\mathbb{K})$ scambiando tra di loro due righe diverse, allora $f(B) = -f(A)$.*

SOLUZIONE:

Se $n = 1$, allora non c'è nulla da dimostrare. Supponiamo $n \geq 2$. Siano $r, s \in \{1, \dots, n\}$ tali che $r < s$ e B è ottenuta da A scambiando la r–esima riga con la s–esima. Da $(D1)$ segue che:

$$f\begin{pmatrix} A^{(1)} \\ \vdots \\ A^{(r-1)} \\ A^{(r)} + A^{(s)} \\ A^{(r+1)} \\ \vdots \\ A^{(s-1)} \\ A^{(r)} + A^{(s)} \\ A^{(s+1)} \\ \vdots \\ A^{(n)} \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} A^{(1)} \\ \vdots \\ A^{(r-1)} \\ A^{(r)} \\ A^{(r+1)} \\ \vdots \\ A^{(s-1)} \\ A^{(r)} \\ A^{(s+1)} \\ \vdots \\ A^{(n)} \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} A^{(1)} \\ \vdots \\ A^{(r-1)} \\ A^{(r)} \\ A^{(r+1)} \\ \vdots \\ A^{(s-1)} \\ A^{(s)} \\ A^{(s+1)} \\ \vdots \\ A^{(n)} \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} A^{(1)} \\ \vdots \\ A^{(r-1)} \\ A^{(s)} \\ A^{(r+1)} \\ \vdots \\ A^{(s-1)} \\ A^{(r)} \\ A^{(s+1)} \\ \vdots \\ A^{(n)} \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} A^{(1)} \\ \vdots \\ A^{(r-1)} \\ A^{(s)} \\ A^{(r+1)} \\ \vdots \\ A^{(s-1)} \\ A^{(s)} \\ A^{(s+1)} \\ \vdots \\ A^{(n)} \end{pmatrix}.$$

Grazie a $(D2')$, si ha che $0 = 0 + f(A) + f(B) + 0 = f(A) + f(B)$ e quindi $(D2)$ è verificata. ■

Esercizio 9.5. *Siano m e n due interi positivi e sia $\mathbb{K}$ un campo arbitrario. Definiamo la relazione $\mathscr{RC}$ su $M_{m,n}(\mathbb{K})$ ponendo: $A \,\mathscr{RC}\, B$ se B si può ottenere da A mediante un numero finito di operazioni elementari sulle righe e sulle colonne.*

(1) *Si dimostri che, date due matrici $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, $A \,\mathscr{RC}\, B$ se e soltanto se esistono $M \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{K})$ e $N \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tali che $B = MAN$.*

(2) *Si dimostri che $\mathscr{RC}$ è una relazione di equivalenza su $M_{m,n}(\mathbb{K})$.*

(3) *Sia $h := \min\{m, n\}$. Per ogni $r \in \{0, 1, \dots, h\}$, definiamo la matrice $S_{m,n}(r) = (s_{ij})_{i,j} \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ ponendo $s_{ii} = 1$ se $i \in \{1, \dots, r\}$ e $s_{ij} = 0$ altrimenti*[2]*. Si provi che, per ogni $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, vale:*

$$A \,\mathscr{RC}\, S_{m,n}(\mathrm{rk}(A)).$$

(4) *Sia $\pi : M_{m,n}(\mathbb{K}) \longrightarrow M_{m,n}(\mathbb{K})/_{\mathscr{RC}}$ la proiezione naturale al quoziente $A \overset{\pi}{\mapsto} [A]_{\mathscr{RC}}$ e sia $\Phi : M_{m,n}(\mathbb{K}) \longrightarrow \{0, 1, \dots, h\}$ la funzione definita ponendo $\Phi(A) := \mathrm{rk}(A)$ per ogni $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$. Si dimostri che Φ* passa al quoziente rispetto a *$\mathscr{RC}$, ovvero esiste, ed è unica, una funzione $\varphi : M_{m,n}(\mathbb{K})/_{\mathscr{RC}} \longrightarrow \{0, 1, \dots, h\}$ tale che il seguente diagramma commuta*

$$\begin{tikzcd} M_{m,n}(\mathbb{K}) \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\pi"'] & \{0,1,\dots,h\} \\ M_{m,n}(\mathbb{K})/_{\mathscr{RC}} \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd},$$

ovvero tale che $\Phi = \varphi \circ \pi$.

(5) *Si dimostri che la funzione φ definita al punto (4) è una bigezione.*

SOLUZIONE:

(1) Vedi il punto 9 a pagina 47 di Sernesi.

(2) $\mathscr{RC}$ è evidentemente riflessiva: per ogni $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, $A = I_m A I_n$ e quindi $A \,\mathscr{RC}\, A$.

[1] I dettagli di tale dimostrazione sono stati fatti in classe.

[2] Se $r = 0$, allora $S_{m,n}(r)$ è la matrice nulla di $M_{m,n}(\mathbb{K})$.

Proviamo che $\mathscr{RC}$ è simmetrica. Siano $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ tali che $A\,\mathscr{RC}\,B$. Dobbiamo provare che $B\,\mathscr{RC}\,A$. Grazie a (1), esistono $M \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{K})$ e $N \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tali che $B = MAN$. Segue che $A = M^{-1}BN^{-1}$ e quindi $B\,\mathscr{RC}\,A$.

La transitività di $\mathscr{RC}$ è evidente dalla definizione di $\mathscr{RC}$ stessa. Ad ogni modo dimostriamolo usando (1). Sia $C \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ tale che $B\,\mathscr{RC}\,C$ e siano $P \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{K})$ e $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tali che $C = PBQ$. Poiché $C = PBQ = (PM)A(NQ)$, $PM \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{K})$ e $NQ \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, abbiamo che $A\,\mathscr{RC}\,C$.

(3) Sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ e sia $r := \mathrm{rk}(A)$. Poiché le operazioni elementari sulle righe e sulle colonne di una matrice non alterano il rango della matrice stessa, applicando la tecnica di eliminazione di Gauss–Jordan ad A sia per righe che per colonne, otteniamo che $A\,\mathscr{RC}\,S_{m,n}(r)$.

(4) Cominciamo col dimostrare che, se una tale φ esiste, allora è unica. Supponiamo che φ_1 e φ_2 siano funzioni da $M_{m,n}(\mathbb{K})/_{\mathscr{RC}}$ in $\{0, 1, \ldots, h\}$ tali che $\varphi_1 \circ \pi = \Phi = \varphi_2 \circ \pi$. Sia $\alpha \in M_{m,n}(\mathbb{K})/_{\mathscr{RC}}$. Dobbiamo dimostrare che $\varphi_1(\alpha) = \varphi_2(\alpha)$. Poiché π è surgettiva, esiste $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ tale che $\pi(A) = [A]_{\mathscr{RC}} = \alpha$. Segue che:

$$\varphi_1(\alpha) = \varphi_1(\pi(A)) = (\varphi_1 \circ \pi)(A) = (\varphi_2 \circ \pi)(A) = \varphi_2(\pi(A)) = \varphi_2(\alpha).$$

Definiamo dunque la funzione $\varphi : M_{m,n}(\mathbb{K})/_{\mathscr{RC}} \longrightarrow \{0, 1, \ldots, h\}$ come segue: per ogni $\alpha \in M_{m,n}(\mathbb{K})/_{\mathscr{RC}}$, scegliamo $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ tale che $\pi(A) = \alpha$ (cioè $A \in \alpha$) e poniamo

$$\varphi(\alpha) := \mathrm{rk}(A).$$

Evidentemente, se φ è ben definita, allora φ è la funzione cercata, essendo $\Phi = \varphi \circ \pi$ per definizione di φ. Proviamo quindi che φ è ben definita, cioè che $\varphi(\alpha)$ non dipende dalla scelta di A. Sia $A' \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ un'altra matrice tale che $\pi(A') = \alpha$, cioè tale che $A' \in \alpha$. Poiché A e A' appartengono alla stessa $\mathscr{RC}$–classe di equivalenza (cioé ad α), $A\,\mathscr{RC}\,A'$ e quindi, grazie all'invarianza del rango rispetto alle operazioni elementari sulle righe e sulle colonne, $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(A')$. ∎

Esercizio 9.6 (Gruppi matriciali speciali - vedi anche Esercizio 3.9, 3.10 e 3.11 del "Foglio di esercizi 3"**).**
Sia n un intero positivo. Definiamo:

(1) $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K}) := \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \mid \det(A) = 1\}$ *per ogni campo* $\mathbb{K}$;
(2) $\mathrm{SO}(n) := \{A \in \mathrm{O}(n) \mid \det(A) = 1\} = \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid A^T A = I_n,\ \det(A) = 1\}$;
(3) $\mathrm{SO}(1,3) := \{A \in \mathrm{O}(1,3) \mid \det(A) = 1\} = \{A \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R}) \mid A^T I_{1,3} A = I_{1,3}\}$, *ove $I_{1,3}$ è la matrice diagonale in $M_4(\mathbb{R})$ avente il primo elemento diagonale uguale a 1 e i restanti tre elementi diagonali uguali a -1;*
(4) $\mathrm{SU}(n) := \{A \in \mathrm{U}(n) \mid \det(A) = 1\} = \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \mid A^H A = I_n, \det(A) = 1\}$, *ove A^H è la* matrice trasposta coniugata *di A (anche detta* aggiunta hermitiana *di A) definita ponendo $A^H := (\overline{a_{ji}})_{i,j}$ se $A = (a_{ij})_{i,j}$.*

Dimostrare che:

(1′) $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ *è un sottogruppo di* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ *è detto* gruppo lineare speciale di ordine n (su $\mathbb{K}$).
(2′) $\mathrm{SO}(n)$ *è un sottogruppo di* $\mathrm{O}(n)$. $\mathrm{SO}(n)$ *è detto* gruppo ortogonale speciale di ordine n.[3]
(3′) $\mathrm{SO}(1,3)$ *è un sottogruppo di* $\mathrm{O}(1,3)$. $\mathrm{SO}(1,3)$ *è detto* gruppo di Lorentz proprio.[4]
(4′) $\mathrm{SU}(n)$ *è un sottogruppo di* $\mathrm{U}(n)$. $\mathrm{SU}(n)$ *si chiama* gruppo unitario speciale di ordine n.[5]

SOLUZIONE:
Segue subito dalla formula di Binet. ∎

Esercizio 9.7. *Si calcoli il determinante della seguente matrice $A \in M_6(\mathbb{R})$ e si dica se è invertibile:*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 7 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

[3] Il gruppo SO(3) riveste un ruolo molto importante in Fisica, i suoi elementi corrispondono alle rotazioni spaziali.
[4] Il ruolo di SO(1, 3) è cruciale nelle teorie relativistiche.
[5] Per chiarire la rilevanza in Fisica dei gruppi unitari e unitari speciali citiamo, a titolo di esempio, il fatto che il prodotto $\mathrm{SU}(3) \times \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{U}(1)$ è il gruppo di simmetria interna del *modello standard* (ovvero la teoria unificata che descrive tre delle quattro interazioni fondamentali: interazione elettromagnetica, nucleare forte e nucleare debole). In Fisica, per gruppo di simmetria interna (o *gruppo di gauge*) di una teoria si intende, in generale, un gruppo nel quale gli elementi si possono rappresentare (mediante omomorfismo) come trasformazioni rispetto alle quali la teoria è invariante.

SOLUZIONE:

Sottraendo la penultima riga dall'ultima riga e sviluppando $\det(A)$ successivamente secondo la prima colonna, l'ultima riga, la seconda riga e la seconda colonna otteniamo:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 7 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 7 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -3.$$

Poiché $\det(A) \neq 0$, A è invertibile. ∎

Esercizio 9.8 (Esempio 9.4 di Ab-deF[6]). *Siano $A, A^* \in M_n(\mathbb{K})$ matrici partizionate a blocchi come segue*

$$A = \left(\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline \mathbf{0}_1 & D \end{array}\right) \quad e \quad A^* = \left(\begin{array}{c|c} B & \mathbf{0}_2 \\ \hline E & D \end{array}\right)$$

dove $B \in M_p(\mathbb{K})$, $C \in M_{p,q}(\mathbb{K})$, $\mathbf{0}_2$ è la matrice nulla in $M_{p,q}(\mathbb{K})$, $E \in M_{q,p}(\mathbb{K})$, $\mathbf{0}_1$ è la matrice nulla in $M_{q,p}(\mathbb{K})$ e $D \in M_q(\mathbb{K})$ per qualche $p, q \in \mathbb{N}^*$ con $p+q = n$. Si provi che $\det(A) = \det(B)\det(C) = \det(A^*)$.

SOLUZIONE:

Cominciamo dimostrando che $\det(A) = \det(B)\det(C)$. Se $\det(B) = 0$, allora le colonne di B sono linearmente dipendenti. Segue che anche le prime p colonne di A lo sono (perché?). Dunque $\det(A) = 0 = \det(B)\det(C)$.

Supponiamo che $\det(B) \neq 0$, ovvero che B sia invertibile. Allora possimo scrivere $A = A'A''$ (vedi Esercizio 5.12 del "Foglio di esercizi 5") dove

$$A' = \left(\begin{array}{c|c} B & \mathbf{0}_2 \\ \hline \mathbf{0}_1 & I_q \end{array}\right) \quad \text{e} \quad A'' = \left(\begin{array}{c|c} I_p & B^{-1}C \\ \hline \mathbf{0}_1 & D \end{array}\right).$$

Sviluppando $\det(A')$ induttivamente secondo le ultime q colonne e $\det(A'')$ induttivamente[7] secondo le prime p colonne, otteniamo $\det(A') = \det(B)$ e $\det(A'') = \det(D)$. Grazie al teorema di Binet, segue la tesi: $\det(A) = \det(A')\det(A'') = \det(B)\det(C)$.

Tenendo presente l'uguaglianza appena dimostrata, si ha:

$$\det(A^*) = \det((A^*)^T) = \det\left(\begin{array}{c|c} B^T & E^T \\ \hline \mathbf{0}_1 & D^T \end{array}\right) = \det(B^T)\det(D^T) = \det(B)\det(D).$$

∎

Esercizio 9.9. *Sia $A = (A_{ij})_{i,j} \in M_n(\mathbb{K})$ una matrice triangolare superiore a blocchi ove $A_{ij} \in M_{m_i,m_j}(\mathbb{K})$ per qualche $m_1, \ldots, m_h \in \mathbb{N}$ tali che $m_1 + \ldots + m_h = n$:*

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1h} \\ \mathbf{0} & A_{22} & \cdots & A_{2h} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & A_{hh} \end{pmatrix}.$$

Si dimostri che $\det(A) = \det(A_{11})\det(A_{22})\cdots\det(A_{hh})$. Si provi inoltre che la stessa uguaglianza sussiste anche nel caso triangolare inferiore a blocchi.

SOLUZIONE:

Si proceda per induzione su $h \geq 1$ utilizzando l'esercizio precedente. ∎

[6]Ab-deF sta ad indicare l'eserciziario "Esercizi di geometria" di Abate e de Fabritiis.

[7]Lo studente provi ad impostare formalmente l'induzione.

Esercizio 9.10. *Si dica per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ la seguente matrice $A_t \in M_6(\mathbb{R})$ è singolare.*

$$A_t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 4 & 5 & 6 & 7 & t \end{pmatrix}$$

SOLUZIONE:

Sviluppando $\det(A)$ successivamente secondo la prima colonna e la prima riga, e usando l'esercizio precedente, otteniamo:

$$\det(A_t) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 4 & 5 & 6 & 7 & t \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & t \end{vmatrix} = - \left| \begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 3 & 4 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 7 & t \end{array} \right| = - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 7 & t \end{vmatrix} = 6t - 49.$$

Dunque A_t è singolare se e soltanto se $t = 49/6$. ■

Esercizio 9.11. *Sia n un intero ≥ 2, siano $x_1, \dots, x_n$ elementi di un campo $\mathbb{K}$ e sia $V(x_1, \dots, x_n) \in M_n(\mathbb{K})$ la seguente matrice, detta* matrice di Vandermonde relativa a $(x_1, \dots, x_n)$*:*

$$V(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Si dimostri che $\det(V(x_1, \dots, x_n)) = \prod_{(i,j) \in T_n} (x_j - x_i)$, dove $T_n := \{(i,j) \in \{1, \dots, n\} \mid i < j\}$ e "$\prod$" è il simbolo di produttoria, che indica il prodotto in $\mathbb{K}$ [8]*. Se ne deduca che $V(x_1, \dots, x_n)$ è invertibile se e soltanto se gli elementi $x_1, \dots, x_n$ sono a due a due distinti.*

SOLUZIONE:

Si veda l'Esempio 6 a pp. 90–91 del Sernesi. ■

Esercizio 9.12. *Sia $n \in \mathbb{N}$, siano $x_1, \dots, x_n, x_{n+1}$ elementi a due a due distinti di un campo $\mathbb{K}$ e siano $y_1, \dots, y_n, y_{n+1}$ elementi di $\mathbb{K}$ (non necessariamente distinti). Indichiamo con $\mathbb{K}_{\leq n}[X]$ il $\mathbb{K}$-spazio vettoriale dei polinomi di grado $\leq n$ a coefficienti in $\mathbb{K}$. Si dimostri che esiste un unico polinomio $P \in \mathbb{K}_{\leq n}[X]$ tale che $P(x_h) = y_h$ per ogni $h \in \{1, \dots, n, n+1\}$.*

SOLUZIONE:

Se $P(X) = a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n \in \mathbb{K}_{\leq n}[X]$, allora l'equazione $P(x_h) = y_h$ diventa $a_0 + a_1 x_h + \ldots + a_n x_h^n = y_h$ per ogni $h \in \{1, \dots, n+1\}$. In altre parole, $P(x_h) = y_h$ per ogni $h \in \{1, \dots, n+1\}$ se e soltanto se il vettore colonna $(a_0, a_1, \dots, a_n)^T \in \mathbb{K}^{n+1}$ risolve il seguente sistema lineare:

$$(\mathcal{S}) : \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^n \\ 1 & x_{n+1} & \cdots & x_{n+1}^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \\ y_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Poiché la matrice dei coefficienti di tale sistema è uguale a $(V(x_1, \dots, x_{n+1}))^T$ (cioé alla trasposta della matrice di Vandermonde relativa a $(x_1, \dots, x_{n+1})$: vedi esercizio precedente) e gli elementi $x_1, \dots, x_{n+1}$ sono a due a due distinti, grazie all'esercizio precedente, segue che $(V(x_1, \dots, x_{n+1}))^T$ è invertibile e quindi $(\mathcal{S})$ ha un'unica soluzione. ■

[8] Usualmente, per semplicità , si usa il simbolo $\prod_{i<j}(x_j - x_i)$ al posto di $\prod_{(i,j) \in T_n}(x_j - x_i)$.

Esercizio 9.13. *Sia $n \in \mathbb{N}$, siano $x_1, \ldots, x_{n+1}$ elementi a due a due distinti di un campo $\mathbb{K}$ e sia $\mathbb{K}_{\leq n}[X]$ il $\mathbb{K}$-spazio vettoriale dei polinomi di grado $\leq n$ a coefficienti in $\mathbb{K}$. Per ogni $k \in \{1, \ldots, n+1\}$, definiamo il polinomio $L_k \in \mathbb{K}_{\leq n}[X]$ ponendo*

$$L_k(X) := \prod_{h \in \{1,\ldots,n+1\} \setminus \{k\}} (x_k - x_h)^{-1}(X - x_h).$$

Si dimostrino le seguenti affermazioni:

(1) *Per ogni $k, h \in \{1, \ldots, n+1\}$, $L_k(x_h) = \delta_{kh}$, ove $\delta_{kh} = 1 \in \mathbb{K}$ se $k = h$ e $\delta_{kh} = 0 \in \mathbb{K}$ se $k \neq h$.*
(2) *$(L_1, \ldots, L_{n+1})$ è una base di $\mathbb{K}_{\leq n}[X]$.*
(3) *Dati $y_1, \ldots, y_{n+1} \in \mathbb{K}$ (non necessariamente distinti), il polinomio $P(X) := \sum_{h=1}^{n+1} y_k L_k(X) \in \mathbb{K}_{\leq n}[X]$ ha la seguente proprietà :*

$$(*) \qquad P(x_h) = y_h \text{ per ogni } h \in \{1, \ldots, n+1\} \text{ [9]}.$$

(4) *L'applicazione $\varphi : \mathbb{K}_{\leq n}[X] \longrightarrow \mathbb{K}^{n+1}$ definita ponendo*

$$\varphi(Q) := (Q(x_1), \ldots, Q(x_{n+1})) \text{ per ogni } Q \in \mathbb{K}_{\leq n}[X]$$

è un isomorfismo lineare. Dedurre da questo fatto che, dati $y_1, \ldots, y_{n+1} \in \mathbb{K}$ (non necessariamente distinti), il polinomio P definito al punto (3) è l'unico polinomio in $\mathbb{K}_{\leq n}[X]$ avente la proprietà $(*)$.

SOLUZIONE:

(1) Verifica diretta.

(2) Poiché $(1, X, X^2, \ldots, X^n)$ è una base di $\mathbb{K}_{\leq n}[X]$, si ha che $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}_{\leq n}[X]) = n+1$. Dunque è sufficiente dimostrare che i polinomi $L_1, \ldots, L_{n+1}$ sono linearmente indipendenti. Siano $a_1, \ldots, a_{n+1} \in \mathbb{K}$ tali che il polinomio $a_1L_1 + \ldots + a_{n+1}L_{n+1}$ è nullo. Dobbiamo provare che $a_1 = \ldots = a_{n+1} = 0$. Osserviamo che, grazie a (1), si ha:

$$0 = (a_1L_1 + \ldots + a_{n+1}L_{n+1})(x_h) = \sum_{k=1}^{n+1} a_k \delta_{kh} = a_h$$

per ogni $h \in \{1, \ldots, n+1\}$.

(3) è immediata conseguenza di (1).

(4) Proviamo che φ è lineare. Siano $Q, Q' \in \mathbb{K}_{\leq n}[X]$ e sia $k \in \mathbb{K}$, valgono:

$$\begin{aligned}\varphi(Q+Q') :=& ((Q+Q')(x_1), \ldots, (Q+Q')(x_{n+1})) = (Q(x_1) + Q'(x_1), \ldots, Q(x_{n+1}) + Q'(x_{n+1})) = \\ =& (Q(x_1), \ldots, Q(x_{n+1})) + (Q'(x_1), \ldots, Q'(x_{n+1})) = \varphi(Q) + \varphi(Q')\end{aligned}$$

e

$$\varphi(kQ) = ((kQ)(x_1), \ldots, (kQ)(x_{n+1})) = (kQ(x_1), \ldots, kQ(x_{n+1})) = k(Q(x_1), \ldots, Q(x_{n+1})) = k\varphi(Q).$$

Poiché φ è surgettiva per il punto (3), segue che φ è anche iniettiva[10]. L'iniettività di φ implica l'unicità di P. ∎

Esercizio 9.14. *Siano v_1, v_2, v_3 tre vettori in $\mathbb{R}^3$, sia $\mathrm{Vol}(v_1, v_2, v_3)$ il volume del parallelepipedo generato da v_1, v_2 e v_3 e sia $A \in M_3(\mathbb{R})$. Si dimostri la seguente formula:*

$$\mathrm{Vol}(Av_1, Av_2, Av_3) = |\det(A)| \cdot \mathrm{Vol}(v_1, v_2, v_3).$$

SOLUZIONE:

È noto che $\mathrm{Vol}(v_1, v_2, v_3) = \left|\det((v_1|v_2|v_3))\right|$, ove $(v_1|v_2|v_3)$ denota la matrice in $M_3(\mathbb{R})$ avente per colonne v_1, v_2 e v_3. Osserviamo che $(Av_1|Av_2|Av_3) = A(v_1|v_2|v_3)$. Dunque usando la formula di Binet otteniamo:

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}(Av_1, Av_2, Av_3) =& \left|\det((Av_1|Av_2|Av_3))\right| = \left|\det(A(v_1|v_2|v_3))\right| = \left|\det(A)\det((v_1|v_2|v_3))\right| = \\ =& |\det(A)| \cdot \left|\det((v_1|v_2|v_3))\right| = |\det(A)| \cdot \mathrm{Vol}(v_1, v_2, v_3).\end{aligned}$$

∎

Esercizio 9.15. *Siano $m, n \in \mathbb{N}^*$, sia $A \in M_m(\mathbb{K})$ e sia $B \in M_n(\mathbb{K})$. Provare che $\det(A \otimes B) = (\det(A))^n(\det(B))^m$.*[11]

[9] Il polinomio P si dice *polinomio interpolante lagrangiano* ("*Lagrangian interpolating polynomial*" in inglese) relativo alle coppie $(x_1, y_1), \ldots, (x_{n+1}, y_{n+1})$.

[10] Vedi Corollario 11.8 a p. 142 del Sernesi.

[11] Vedi Esercizio 5.13 sul "Foglio di esercizi 5" per la definizione di $A \otimes B$.

SOLUZIONE:

Grazie all'Esercizio 5.13(5) sappiamo che $A \otimes B = (A \otimes I_n)(I_m \otimes B)$. La matrice $I_m \otimes B$ è diagonale a blocchi con m elementi diagonali tutti uguali a B. Dall'Esercizio 9.9 segue che $\det(I_m \otimes B) = (\det(B))^m$.

Grazie alla formula di Binet, resta da provare che $\det(A \otimes I_n) = (\det(A))^n$. Per ogni $\alpha, \beta \in \{1, \ldots, mn\}$, indichiamo con $\mathrm{a}_{\alpha\beta}$ l'elemento di posto (α, β) di $A \otimes I_n$. Dalla definizione della matrice $A \otimes I_n$ segue l'esistenza di una permutazione p di $\{1, \ldots, mn\}$ (si costruisca p) tale che, riordinando sia le righe che le colonne di $A \otimes I_n$ secondo p, si ottiene $I_n \otimes A$, ovvero $(\mathrm{a}_{p(\alpha),p(\beta)})_{\alpha\beta} = I_n \otimes A$. Segue che:

$$\det(A \otimes I_n) = \epsilon(p)\epsilon(p)\det(I_n \otimes A) = \det(I_n \otimes A) = (\det(A))^n.$$

■

Si svolgano i seguenti esercizi su Ab-deF: Esempio 9.1, 9.2, 9.3, 9.4, 9.11 e Esercizio 9.1, 9.2, 9.3, 9.5, 9.6, 9.7, 9.11, 9.12, 9.17[12], 9.20, 9.21 e 9.22.

Principio dei minori orlati. Ricordiamo che, data una matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ di rango r, se la sua sottomatrice $A(i_1, \ldots, i_r | j_1, \ldots, j_r)$ è invertibile, allora si ha:

- $(A^{(i_1)}, \ldots, A^{(i_r)})$ è una base del sottospazio vettoriale $\langle A^{(1)}, \ldots, A^{(m)} \rangle$ di $\mathbb{K}^n = M_{1,n}(\mathbb{K})$ generato dalle righe di A.
- $(A_{(j_1)}, \ldots, A_{(j_r)})$ è una base del sottospazio vettoriale $\langle A_{(1)}, \ldots, A_{(n)} \rangle$ di $\mathbb{K}^m = M_{m,1}(\mathbb{K})$ generato dalle colonne di A.

Esercizio 9.16. *Per ciascuna delle seguenti matrici*

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R}) \quad e \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in M_{4,5}(\mathbb{R}),$$

individuare una sottomatrice quadrata invertibile di ordine massimo. Dedurre il valore di $\mathrm{rk}(A_1)$ *e di* $\mathrm{rk}(A_2)$.

SOLUZIONE:

Applichiamo la "procedura dei minori orlati" sia ad A_1 che ad A_2 "registrando" gli eventuali scambi di righe e di colonne:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array} = A_1 \stackrel{(1)}{\longmapsto} \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 4 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array} = A_1' \stackrel{(2)}{\longmapsto} B_1 = A_1(1,2,3|1,2,4) \text{ e } \mathrm{rk}(A_1) = 3.$$

(1): $|A(1,2|1,2)| = 1 \neq 0$; orliamo $A(1,2|1,2)$, $|A(1,2,3|1,2,3)| = 0$, $|A(1,2,3|1,2,4)| = 2 \neq 0 \Longrightarrow$ porto in testa $A(1,2,3|1,2,4)$ scambiando tra di loro la terza colonna con la quarta.

(2): $\det(A_1') = 0 \Longrightarrow$ il principio dei minori orlati assicura che $\mathrm{rk}(A_1) = 3$ e la sottomatrice $B_1 = A_1(1,2,3|1,2,4)$ di A_1 ha la proprietà desiderata (cioé B_1 è una sottomatrice quadrata invertibile di A_1 di ordine massimo).

Ripetendo la stessa procedura con A_2 otteniamo $B_2 = A_2(1,2,3|2,3,4)$ e quindi $\mathrm{rk}(A_2) = 3$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} 2 & 4 & 3 & 1 & 5 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \mapsto B_2 = A_2(1,2,3|2,3,4) \text{ e } \mathrm{rk}(A_2) = 3.$$

■

[12] Si tenga presente che, data $A \in M_n(\mathbb{K})$, la matrice $\mathrm{Cof}(A) \in M_n(\mathbb{K})$ dei cofattori di A per Ab-deF (vedi Esempio 9.6, p. 94) coincide con la trasposta della matrice $\mathrm{cof}(A) \in M_n(\mathbb{K})$ dei cofattori di A per Sernesi (vedi Definizione 6.8, p. 81).

Esercizio 9.17. *Sia W il sottospazio vettoriale di $\mathbb{C}^4$ generato dai vettori (colonna) $w_1 = (1, \mathrm{i}, 1, -\mathrm{i})^T$, $w_2 = (\mathrm{i}, -1, \mathrm{i}, 1)^T$ e $w_3 = (-\mathrm{i}, 1, -\mathrm{i}, 1)^T$. Si estragga da (w_1, w_2, w_3) una base di W e la si completi ad una base di $\mathbb{C}^4$.*

SOLUZIONE:
Sia $A \in M_{4,3}(\mathbb{C})$ la matrice avente w_1, w_2 e w_3 come colonne:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & -1 & 1 \\ 1 & \mathrm{i} & -\mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Estraiamo da A una sottomatrice quadrata invertibile B di ordine massimo (cioé di ordine uguale a $\mathrm{rk}(A)$). Applichiamo la "procedura dei minori orlati" ad A "registrando" gli eventuali scambi di righe e di colonne:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & -1 & 1 \\ 1 & \mathrm{i} & -\mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} = A \overset{(1)}{\longmapsto} \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 1 & 3 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i} & \mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 1 & 1 \\ 1 & -\mathrm{i} & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 1 & -1 \end{pmatrix} \end{array} = A' \overset{(2)}{\longmapsto} B = A(1,4|1,3) \text{ e } \mathrm{rk}(A) = 2.$$

(1): $|A(1,2|1,2)| = |A(1,2|1,3)| = |A(1,3|1,2)| = |A(1,3|1,3)| = |A(1,4|1,2)| = 0$, $|A(1,4|1,3)| = 2 \neq 0 \implies$ porto in testa $A(1,4|1,3)$ scambiando tra di loro la seconda riga con la quarta, e la seconda colonna con la terza.

(2): $|A'(1,2,3|1,2,3)| = |A'(1,2,4|1,2,3)| = 0 \implies$ il principio dei minori orlati assicura che $\mathrm{rk}(A) = 2$ e la sottomatrice $B = A(1,4|1,3)$ di A ha la proprietà desiderata (cioé B è una sottomatrice quadrata invertibile di A di ordine massimo).

Le colonne estratte da A per ottenere B sono la 1^a e la 3^a. Dunque (w_1, w_3) è una base di W.

Le righe estratte da A per ottenere B sono la 1^a e la 4^a. Dunque (w_1, w_4, e_2, e_3) è una base di $\mathbb{C}^4$, dove $e_2 = (0,1,0,0)$ e $e_3 = (0,0,1,0)$. ∎

Equazioni parametriche ed equazioni cartesiane di sottospazi vettoriali di $\mathbb{K}^n$. Sia W un sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^n = M_{n,1}(\mathbb{K})$, sia $(\mathcal{S})$ un sistema lineare omogeneo $m \times n$ a coefficienti in $\mathbb{K}$ e siano $w_1 = (w_{1,1}, \ldots, w_{n,1})^T, \ldots, w_s = (w_{1,s}, \ldots, w_{n,s})^T$ vettori di W.

Se $\mathrm{Sol}(\mathcal{S}) = \mathrm{W}$ allora le equazioni di $(\mathcal{S})$ si dicono *equazioni cartesiane di W in $\mathbb{K}^n$* (rispetto alla base canonica).[13] Se $(w_1, \ldots, w_s)$ è una base di W allora le equazioni

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = t_1 w_1 + \ldots + t_s w_s \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x_1 = & t_1 w_{1,1} + \ldots + t_s w_{1,s} \\ \vdots & \vdots \\ x_n = & t_1 w_{n,1} + \ldots + t_s w_{n,s} \end{cases} \quad \text{con } t_1, \ldots, t_s \in \mathbb{K}$$

si dicono *equazioni parametriche di W in $\mathbb{K}^n$* (rispetto alla base canonica). Evidentemente, sia le equazioni cartesiane che quelle parametriche non sono univocamente determinate da W.

Se sono assegnate equazioni cartesiane $(\mathcal{S})$ di W, allora per trovare equazioni parametriche di W è sufficiente risolvere il sistema omogeneo $(\mathcal{S})$.

Viceversa, se sono assegnate equazioni parametriche di W, e quindi è assegnata una base $(w_1, \ldots, w_s)$ di W, allora per trovare equazioni cartesiane di W possiamo procedere come segue:

- si considera la matrice $A \in M_{s,n}(\mathbb{K})$ avente per righe $w_1^T, \ldots, w_s^T$ [14] e si osserva che

$$\text{(RK)} \qquad (x_1, \ldots, x_n)^T \in W \iff \mathrm{rk}\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \\ \hline & A & \end{pmatrix} = s.$$

- si individua una sottomatrice quadrata invertibile $B = A(1, \ldots, s|j_1, \ldots, j_s)$ di A di ordine s e si definisce il sistema lineare omogeneo $(\mathcal{S})$ con $(n-s)$ equazioni nelle incognite $x_1, \ldots, x_n$ imponendo che tutti i minori orlati di B in A siano nulli. Grazie a (RK) e al principio dei minori orlati, si ha che le equazioni di $(\mathcal{S})$ sono equazioni cartesiane di W.

[13] $(\mathcal{S})$ si dice *sistema di equazioni cartesiane di W in $\mathbb{K}^n$* (rispetto alla base canonica).

[14] Si considerano i vettori riga w_i^T anziché gli originali vettori colonna w_i solo perché, usualmente, è più pratico scrivere A anziché A^T.

A meno di riordinare gli indici di colonna di A e quindi le incognite $x_1, \ldots, x_n$, possiamo supporre che $B = A(1, \ldots, s|1, \ldots, s)$. Allora si ha:

$$(x_1, \ldots, x_s)^T \in W \iff \operatorname{rk}\left(\begin{array}{c|c|c|c} x_1 \cdots x_s & x_{s+1} & \cdots & x_n \\ \hline B & A^{(s+1)} & \cdots & A^{(n)} \end{array}\right) = s$$

e quindi $W = \mathrm{Sol}(\mathcal{S})$, dove $(\mathcal{S})$ è definito come segue:

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} \det\left(\begin{array}{c|c} x_1 \cdots x_s & x_{s+1} \\ \hline B & A^{(s+1)} \end{array}\right) = 0 \\ \vdots \\ \det\left(\begin{array}{c|c} x_1 \cdots x_s & x_n \\ \hline B & A^{(n)} \end{array}\right) = 0 \end{cases} .$$

Esercizio 9.18. *Sia W il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^5$ avente le seguenti equazioni cartesiane:*

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_5 = 0 \end{cases} .$$

Si scrivano delle equazioni parametriche di W e se ne deduca la dimensione di W.

SOLUZIONE:
Applichiamo il metodo di eliminazione di Gauss–Jordan al sistema $(\mathcal{S})$ [15] si ottiene:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \overset{\mathcal{GJ}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

e quindi

$$(\mathcal{S}) \iff \begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = x_4 - x_5 \\ x_2 + 4x_3 = -x_4 + 2x_5 \\ x_3 = -x_4 + x_5 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = 2x_4 - x_5 \\ x_2 = 3x_4 - 2x_5 \\ x_3 = -x_4 + x_5 \end{cases} .$$

Possiamo dunque scrivere le seguenti equazioni parametriche per W:

$$\begin{cases} x_1 = 2t - s \\ x_2 = 3t - 2s \\ x_3 = -t + s \\ x_4 = t \\ x_5 = s \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{con } t, s \in \mathbb{R}.$$

Segue che $\dim_{\mathbb{R}}(W) = 2$. ■

Esercizio 9.19. *Sia W il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ descritto dalle seguenti equazioni parametriche:*

$$\begin{cases} x_1 = t - s \\ x_2 = 0 \\ x_3 = -t + s \\ x_4 = t \\ x_5 = -t - 2s \end{cases} \quad \textit{con } t, s \in \mathbb{R}.$$

Si scrivano delle equazioni cartesiane di W.

SOLUZIONE:
Scriviamo le equazioni parametriche in forma vettoriale:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{con } t, s \in \mathbb{R}.$$

[15] Poiché il sistema $(\mathcal{S})$ è omogeneo, si può applicare il metodo di Gauss–Jordan alla sua matrice dei coefficienti anziché alla sua matrice orlata.

Dunque, ponendo $w_1 := (1,0,-1,1,-1)^T$ e $w_2 := (-1,0,1,0,-2)^T$, abbiamo che (w_1, w_2) è una base di W. Consideriamo la matrice $A \in M_{2,5}(\mathbb{R})$ avente per righe w_1^T e w_2^T, cioè:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Procedendo come nella soluzione dell'Esercizio 9.16, otteniamo che la sottomatrice $B = A(1,2|1,4)$ di A è invertibile. Portando B in testa ad A, scambiando coerentemente le incognite e applicando il principio dei minori orlati, deduciamo che:

$$\mathrm{rk}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = 2 \Longleftrightarrow \mathrm{rk}\begin{pmatrix} x_1 & x_4 & x_3 & x_2 & x_5 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = 2 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \begin{vmatrix} x_1 & x_4 & x_3 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \\ \\ \begin{vmatrix} x_1 & x_4 & x_2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \\ \\ \begin{vmatrix} x_1 & x_4 & x_5 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \quad (\mathcal{S}) : \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \\ -2x_1 + 3x_4 + x_5 = 0 \end{array} \right. .$$

Le equazioni del sistema lineare omogeneo $(\mathcal{S})$ definito sopra sono delle equazioni cartesiane di W: si osservi come, sostituendo a x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 i corrispondenti valori parametrici in t, s dentro tali equazioni, si ottengano delle identità in t, s. ∎

Esercizio 9.20 (Proiezione su sottospazi vettoriali). . *Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ e siano U e W due sottospazi vettoriali di V tali che $U \oplus W = V$. Definiamo l'applicazione $\rho_U : V \longrightarrow W$, detta* proiezione di V su W lungo U, *come segue: dato $v \in V$, consideriamo gli unici vettori $u \in U$ e $w \in W$ tali che $v = u + w$ e definiamo $\rho_U(v) := w$. Si dimostri che ρ_U è lineare.*

SOLUZIONE:

Vedi l'Esempio 3 a p. 136 del Sernesi. ∎

Esercizio 9.21 (Esercizio 4, p. 149, Sernesi). *Sia W il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ descritto dalle seguenti equazioni cartesiane:*

$$(\mathcal{S}) : \left\{ \begin{array}{l} 2X_1 + X_3 = 0 \\ X_2 - 3X_4 = 0 \end{array} \right.$$

e sia $U = \langle e_1, e_2 \rangle$, dove $e_1 = (1,0,0,0)^T$ e $e_2 = (0,1,0,0)^T$. Dopo aver verificato che $U \oplus W = \mathbb{R}^4$, trovare l'epressione analitica della proiezione $\rho_U : \mathbb{R}^4 \longrightarrow W$ di $\mathbb{R}^4$ su W lungo U

SOLUZIONE:

Poiché $(\mathcal{S})$ è equivalente a $X_2 = 3X_4$ e $X_3 = -2X_1$, si ha:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 3s \\ -2t \\ s \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{con } t, s \in \mathbb{R}$$

e quindi, posto $w_1 := (1,0,-2,0)^T$ e $w_2 := (0,3,0,1)^T$, (w_1, w_2) è una base di W.

Essendo $\dim_{\mathbb{R}}(U) = 2 = \dim_{\mathbb{R}}(W)$, la formula di Grassmann assicura che $U \oplus W = \mathbb{R}^4$ se e soltanto se $\dim_{\mathbb{R}}(U + W) = 4$, ovvero se e soltanto se la matrice $A \in M_4(\mathbb{R})$ avente per colonne e_1, e_2, w_1, w_2 ha rango 4, ovvero $\det(A) \neq 0$:

$$\det(A) = \left| \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ \hline 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Ciò prova che $U \oplus W = \mathbb{R}^4$. Fissiamo ora un vettore $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbb{R}^4$ e calcoliamo $\rho_U(x)$. Innanzitutto, calcoliamo $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ tali che

$$(\bullet) \qquad a_1 e_1 + a_2 e_2 + b_1 w_1 + b_2 w_2 = x.$$

Si osservi che $\rho_U(x) = b_1 w_1 + b_2 w_2$. L'equazione $(\bullet)$ corrisponde al sistema lineare $A(a_1, a_2, b_1, b_2)^T = x$ nelle incognite a_1, a_2, b_1, b_2 (ove x è il vettore colonna dei termini noti), cioé al sistema seguente:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ \hline 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo b_1 e b_2 con Cramer:

$$b_1 = \frac{\left|\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & x_1 & 0 \\ 0 & 1 & x_2 & 3 \\ \hline 0 & 0 & x_3 & 0 \\ 0 & 0 & x_4 & 1 \end{array}\right|}{\det(A)} = -\frac{x_3}{2}$$

e

$$b_2 = \frac{\left|\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & x_2 \\ \hline 0 & 0 & -2 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & x_4 \end{array}\right|}{\det(A)} = x_4.$$

Segue che:

$$\rho_U(x) = b_1 w_1 + b_2 w_2 = -\frac{x_3}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_3/2 \\ 3x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

■

Si svolgano i seguenti esercizi su Ab-deF: Esempio 5.1, 5.2, 5.3, 5.6 e Esercizio 5.11, 5.12, 5.15, 5.16.