CORSI DI LAUREA IN MATEMATICA E FISICA

FOGLIO DI ESERCIZI # 8– GEOMETRIA 1

Nota: Data la numerosità degli esercizi tratti dall'Eserciziario di Claretta Carrara presenti in questo foglio, rimandiamo all'Eserciziario stesso per le soluzioni di quelli attraverso il numero di riferimento tra parentesi. Presentiamo la correzione degli altri.

Esercizio 8.1 (Esercizio 6.1)**.** *Calcolare il determinante delle seguenti matrici:*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -11 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

Esercizio 8.2 (Esercizio 6.2)**.** *Calcolare il determinante delle seguenti matrici:*

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad A_5 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad A_6 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Esercizio 8.3. *Dimostrare che il determinante di una matrice reale o complessa antisimmetrica di ordine dispari è nullo.*

Soluzione:

Una matrice A è antisimmetrica se $A = -A^T$. Per le proprietá del determinante si ha $det(A) = det(A^T)$ e $det(-A) = (-1)^n det(A)$. Quindi essendo A antisimmetrica $det(A) = -det(A)$ essendo n dispari, e l'uguaglianza implica che $det(A) = 0$. ■

Esercizio 8.4 (Esercizio 6.3)**.** *Calcolare il rango della seguente matrice A.*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k+2 & 0 \\ k^2-1 & 0 & 4-k \\ 1 & 2k-3 & 0 \end{pmatrix} \qquad k \in \mathbb{R}$$

Esercizio 8.5 (Esercizio 6.5)**.** *Dopo avere stabilito se le seguenti matrici sono invertibili calcolarne l'inversa:*

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad A_5 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad A_6 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Esercizio 8.6. *Sia A la matrice reale*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ k & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

a) *Calcolare il determinante di A e stabilire per quali valori di k la matrice è invertibile.*
b) *Trovare la matrice inversa di A per $k = 1$.*

Esercizio 8.7. *Sia A la matrice reale*

$$A = \begin{pmatrix} k & k-1 & k \\ 0 & 2k-2 & 0 \\ 1 & k-1 & 2-k \end{pmatrix} \qquad (k \text{ reale}).$$

a) *Si determini per quali valori di k la matrice A è invertibile. Si calcoli la matrice inversa di A per $k = -1$.*
b) *Calcolare il rango di A al variare del parametro k.*

Esercizio 8.8. *Sia A_t la matrice reale*

$$A_t = \begin{pmatrix} 0 & t & 0 \\ 1 & 1 & t \\ 2 & t & 1 \end{pmatrix} \qquad (t \text{ reale}).$$

Stabilire per quali valori di t la matrice A_t è invertibile.

Esercizio 8.9. *Sia A la matrice reale*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3k & 8+2k & k-1 \\ 0 & 8k+8 & 0 \end{pmatrix} \qquad (t \text{ reale}).$$

a) *Calcolare il rango di A al variare del parametro k.*
b) *Esistono valori di k per i quali la matrice è invertibile?*

Esercizio 8.10 (Esercizio 6.9)**.** *Sia A la matrice reale*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ -4k & 4k-1 & k-2 \\ 0 & 1-4k & 0 \end{pmatrix} \qquad (t \text{ reale}).$$

a) *Calcolare il rango di A al variare del parametro k.*
b) *Esistono valori di k per i quali la matrice è invertibile?*

Esercizio 8.11 (Esercizio 6.11)**.** *Sia A la matrice reale*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & k-4 \\ 2 & k & 0 \end{pmatrix} \qquad (k \text{ reale}).$$

a) *Stabilire per quali valori di k la matrice A è invertibile.*
b) *Per i valori di k trovati al punto precedente determinare l'inversa di A.*

Esercizio 8.12 (Esercizio 6.12)**.** *Sia A la matrice reale*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & k \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3k \end{pmatrix} \qquad (k \text{ reale}).$$

a) *Calcolare il rango di A al variare del parametro k.*
b) *Si determini il valore di k tale per cui la matrice A abbia determinante uguale a uno. Per tale valore di k, si calcoli la matrice inversa di A.*

Esercizio 8.13 (Esercizio 7.22)**.** *Siano dati i seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$:*

$$v_1 = (2,1,1), \qquad v_2 = (-1,1,2), \qquad v_3 = (3,-2,-1), \qquad v_4 = (4,-1,-2).$$

Stabilire se v_4 è combinazione lineare di v_1, v_2 e v_3.

Esercizio 8.14 (Esercizio 7.23)**.** *Siano dati i seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$:*

$$v_1 = (1,1,1), \qquad v_2 = (2,7,7), \qquad v_3 = (0,k^2+2,3), \qquad v_4 = (1,k+3,k^2+2).$$

Stabilire se v_4 è combinazione lineare di v_1, v_2 e v_3 al variare del parametro k.

Esercizio 8.15 (Esercizio 7.24)**.** *Determinare per quali valori del parametro reale k i seguenti vettori formano una base di $\mathbb{R}^3$.*

$$v_1 = (1,2,-2), \qquad v_2 = (1,1,-3), \qquad v_3 = (3,7,k-6)$$

Esercizio 8.16 (Esercizio 7.26)**.**

a) *Mostrare che i vettori*

$$v_1 = (0,1,1), \quad v_2 = (-1,k,0), \quad v_3 = (1,1,k)$$

sono linearmente indipendenti per ogni valore di $k \in \mathbb{R}$.

b) *Esprimere il vettore $v = (2,1,2)$ come combinazione lineare di v_1, v_2, v_3.*

Esercizio 8.17 (Esercizio 7.26)**.** *In $\mathbb{R}^3$ siano*

$$v_1 = (k,2,1), \quad v_2 = (-2,1,0), \quad v_3 = (0,1,1), \quad (k \text{ parametro reale})$$

a) *Si stabilisca per quali valori di* k *i tre vettori costituiscono una base di* $\mathbb{R}^3$.
b) *Per i valori trovati al punto* a)*, si calcolino le coordinate del vettore* $v = (-2, 1, 2)$ *rispetto a tale base.*

Esercizio 8.18 (Esercizio 7.27)**.** *Si consideri il sottospazio* $V = \langle v_1, v_2, v_3\rangle$ *di* $\mathbb{R}^5$ *generato dai vettori*

$$v_1 = (-1, 1, 2, 1, 0),\ v_2 = (0, 2, 1, 1, 0),\ v_3 = (1, 1, -1, 0, 0).$$

a) *Trovare una base di* V.
b) *Determinare le coordinate del vettore* $v = (-2, 6, 6, 4, 0) \in V$ *rispetto alla base trovata al punto* a).

Esercizio 8.19 (Esercizio 7.28)**.** *Sia* V *il sottospazio di* $\mathbb{R}^3$ *generato dai vettori:*

$$v_1 = (2, 1, 1), \qquad v_2 = (-1, 1, 2), \qquad v_3 = (3, -2, -1), \qquad v_4 = (4, -1, -2).$$

Determinare una base di V*. Esprimere inoltre* v_1*,* v_2*,* v_3 *e* v_4 *come combinazione lineare degli elementi di tale base.*

Esercizio 8.20 (Esercizio 7.29)**.** *Sia* V *il sottospazio di* $\mathbb{R}^4$ *generato dai vettori:*

$$v_1 = (2, 1, 2, 1), \qquad v_2 = (6, 7, 8, 5)$$
$$v_3 = (2k, k + 8, 3k + 3, 2), \qquad v_4 = (0, 2k, 2k, 1).$$

Determinare una base di V *al variare del parametro* k*. Esprimere inoltre* v_1*,* v_2*,* v_3 *e* v_4 *come combinazione lineare degli elementi di tale base.*

Esercizio 8.21 (Esercizio 7.30)**.** *Sia* V *il sottospazio di* $\mathbb{R}^4$ *generato dai vettori:*

$$v_1 = (0, k - 1, k^2 - 1, 3k - 2), \qquad v_2 = (1, 3, 0, 3), \qquad v_3 = (-1, -2, 1, -1).$$

Determinare la dimensione e una base di V *al variare del parametro reale* k.

Esercizio 8.22 (Esercizio 7.31)**.** *Sia* W *il sottospazio di* $\mathbb{R}^4$ *generato dai vettori* $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$*:*

$$v_1 = (-1, 1, -1, 1), \qquad v_2 = (1, k, 3, 4), \qquad v_3 = (1, -1, k, 1), \qquad v_4 = (0, 0, 1, k)$$

Si calcoli la dimensione di W *al variare di* $k \in \mathbb{R}$.

Esercizio 8.23 (Esercizio 7.32)**.** *Si considerino i vettori di* $\mathbb{R}^4$

$$v_1 = (3, -1, 2, 0), \quad v_2 = (-6, 2, -4, 0), \quad v_3 = (-3, k, k - 3, 0)$$

a) *Si stabilisca per quali valori di* k *il vettore* v_3 *appartiene al sottospazio* $W = \langle v_1, v_2\rangle$ *generato da* v_1 *e* v_2.
b) *Si trovi, al variare di* k*, una base di* W *e una base del sottospazio* $\langle v_1, v_2, v_3\rangle$.

Esercizio 8.24 (Esercizio 7.33)**.** *Si considerino i vettori di* $\mathbb{R}^4$

$$v_1 = (1, 2, -1, 3), \quad v_2 = (-2, -4, 2, -6), \quad v_3 = (3, 6, k - 6, 3k)$$

a) *Si stabilisca per quali valori di* k *il vettore* v_3 *appartiene al sottospazio* $W = \langle v_1, v_2\rangle$ *generato da* v_1 *e* v_2.
b) *Si trovi, al variare di* k*, una base di* W *e una base del sottospazio* $\langle v_1, v_2, v_3\rangle$.

Esercizio 8.25 (Esercizio 7.34)**.** *Sia* $V = \langle\ v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4\ \rangle$ *con*

$$v_1 = (3, 7, k + 1, 2k + 2),\ v_2 = (2, 2k + 2, 0, 0),\ v_3 = (1, 1, 0, 0),\ v_4 = (-3, -7, -1, 2k)$$

a) *Si determini la dimensione di* V *al variare di* $k \in \mathbb{R}$.
b) *Si determini una base di* V *al variare di* $k \in \mathbb{R}$.

Esercizio 8.26 (Esercizio 7.35)**.** *Determinare una base dei seguenti sottospazi* W *di* $\mathbb{R}^3$*:*

(1) $W = \langle(1, 2, 5), (-3, -6, -15)\rangle$
(2) $W = \langle(1, 2, 5), (-3, -6, -15), (2, 1, 0)\rangle$
(3) $W = \langle(-1, 2, 0), (0, 1, -1), (1, -1, 2)\rangle$

Esercizio 8.27 (Esercizio 7.36)**.** *Sia* $V = \langle\ v_1,\ v_2,\ v_3\ \rangle$ *con*

$$v_1 = (k + 3,\ k + 3,\ 0), \qquad v_2 = (0,\ 3,\ k + 2), \qquad v_3 = (0,\ 3k,\ k)$$

a) *Si stabilisca per quali valori di* $k \in \mathbb{R}$ *lo spazio* V *coincide con* $\mathbb{R}^3$.
b) *Si determini la dimensione una base di* V *al variare di* $k \in \mathbb{R}$.

Esercizio 8.28 (Esercizio 7.37)**.** *Sia V lo spazio vettoriale generato dai vettori $v_1 = (1, -2, 4, 0)$, $v_2 = (2, 3, -1, 1)$ e $v_3 = (0, -1, 3, 0)$:*

$$V = \langle v_1,\ v_2,\ v_3\rangle$$

(1) *Determinare la dimensione dello spazio vettoriale V.*
(2) *Determinare se il vettore $v_4 = (3, 1, 3, 1)$ appartiene a V. In caso positivo esprimere v_4 come combinazione lineare di v_1, v_2 e v_3.*
(3) *Determinare la dimensione dello spazio vettoriale $W = \langle v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4\rangle$.*

Esercizio 8.29 (Esercizio 7.45)**.** *Si considerino i vettori di $\mathbb{R}^3$: $v_1 = (1, 2, 1)$, $v_2 = (1, 1, -1)$, $v_3 = (1, 1, 3)$, $w_1 = (2, 3, -1)$, $w_2 = (1, 2, 2)$, $w_3 = (1, 1, -3)$.*

a) *Si calcoli la dimensione dei sottospazi $V = \langle v_1, v_2, v_3\rangle$, $W = \langle w_1, w_2, w_3\rangle$.*
b) *Si trovi una base del sottospazio intersezione $V \cap W$.*

Esercizio 8.30 (Esercizio 7.46)**.** *Si considerino i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$:*

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + z = 0\}$$
$$V = \langle (1, 0, 1),\ (1, 2, 1),\ (1, 0, 1)\rangle$$

a) *Determinare una base e la dimensione di U e di V.*
b) *Determinare una base e la dimensione di $U \cap V$.*
b) *Determinare una base e la dimensione di $U + V$.*

Esercizio 8.31 (Esercizio 7.47)**.** *Si considerino i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$:*

$$U = \{(0, 1, 1, 0)a + (0, 0, 0, 1)b \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$
$$V = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y = 0,\ z = 2x\}$$

a) *Determinare una base e la dimensione di U e di V.*
b) *Determinare una base e la dimensione di $U \cap V$.*
c) *Determinare una base e la dimensione di $U + V$.*

Esercizio 8.32 (Esercizio 7.49)**.** *Siano U e V i sottospazi di $\mathbb{R}^3$ così definiti*

$$U = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + z = 0\right\}$$
$$V = \langle (1, -1, 0),\ (1, 1, -1)\rangle$$

a) *Determinare la dimensione e una base dei due sottospazi U e V.*
b) *Determinare la dimensione e una base dei due sottospazi $U + V$ e $U \cap V$.*

Esercizio 8.33 (Esercizio 7.50)**.** *Siano U e V i sottospazi di $\mathbb{R}^3$ così definiti*

$$U = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + z = 0\right\}$$
$$V = \langle (2, -1, -2),\ (-3, 4, 3)\rangle$$

Dimostrare che $U = V$.

Esercizio 8.34 (Esercizio 7.51)**.** *Si consideri il sottoinsieme S di $\mathbb{R}^4$ costituito dai vettori v della forma*

$$v = (a_1, a_1 - a_2 + 2a_3, 2a_1 - a_2, a_1 + 3a_2 + a_4)$$

dove a_1, a_2, a_3 e a_4 sono parametri reali.

a) *S è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$?*
b) *In caso di risposta affermativa ad a), trovare una base di S.*

Esercizio 8.35 (Esercizio 7.52)**.** *Si consideri il sottoinsieme S di $\mathbb{R}^4$ costituito dai vettori v della forma*

$$v = (a_1 - a_2 + 2a_3, a_1, 2a_1 - a_2, a_1 + 3a_2 + a_4)$$

dove a_1, a_2, a_3 e a_4 sono parametri reali.

a) *S è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$?*
b) *In caso di risposta affermativa ad a), trovare una base di S.*

Esercizio 8.36 (Esercizio 7.53)**.** *Si consideri il sottoinsieme S di $\mathbb{R}^4$ costituito dai vettori v della forma*

$$v = (a_1 - a_2 + 2a_3 + a_4,\ a_1,\ 2a_1 - a_2,\ a_1 + 3a_2)$$

dove a_1, a_2, a_3 e a_4 sono parametri reali.

a) *S è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$?*
b) *In caso di risposta affermativa ad a), trovare una base di S.*

Esercizio 8.37 (Esercizio 7.78). *Nello spazio vettoriale $V = \mathbb{R}_2[x]$ dei polinomi reali di grado non superiore a due, si considerino gli elementi*

$$p_1 = x - 1, \quad p_2 = x + 1, \quad p_3 = x^2 - x.$$

a) *Si mostri che l'insieme $\mathcal{B} = (p_1,\ p_2,\ p_3)$ è una base di V.*
b) *Si trovino le coordinate del polinomio costante 1 nella base $\mathcal{B}$.*

Esercizio 8.38. *Studiare al variare del parametro α il sistema lineare seguente:*

$$\begin{cases} x + y + z = \alpha \\ \alpha x + y + 2z = 1 \\ x + \alpha y + 3z = 1 \end{cases}$$

usando i metodi di Rouché -Capelli *e di* Cramer.

Soluzione:
Per applicare il teorema di *Rouché -Capelli* calcoliamo il rango di

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & 1 & 2 \\ 1 & \alpha & 3 \end{pmatrix}$$

Applicando due trasformazioni elementari sulle righe (sottraendo la prima riga alla seconda e alla terza) otteniamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha - 1 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha - 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Se $\alpha = 1$ la seconda e la terza riga della matrice sopra sono linearmente dipendenti mentre la prima e la seconda sono linearmente indipendenti, quindi $rk(A) = 2$.

Se $\alpha \neq 1$, è possibile dividere per $(\alpha - 1)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \frac{1}{(\alpha-1)} \\ 0 & 1 & \frac{2}{(\alpha-1)} \end{pmatrix}$$

La prima riga della matrice sopra risulta essere combinazione lineare delle altre due se e solo se

$$\frac{1}{\alpha - 1} + \frac{2}{\alpha - 1} = 1,$$

ovvere se e solo se $\alpha = 4$. Riassumendo: $rk(A) = 2$ per $\alpha = 1, 4$ e $rk(A) = 3$ altrimenti.

Ora, è necessario calcolare il rango della matrice orlata con la colonna dei coefficienti noti:

$$(A|b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \alpha \\ \alpha & 1 & 2 & 1 \\ 1 & \alpha & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

analogamente a prima, basta sottrarre la prima riga alla seconda e alla terza per palesare il rango di $(A|b)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \alpha \\ \alpha - 1 & 0 & 1 & 1 - \alpha \\ 0 & \alpha - 1 & 2 & 1 - \alpha \end{pmatrix}$$

Se $\alpha = 1$ si ha che $rk(A|b) = 2$ mentre per ogni $\alpha \neq 1$ si ha che $rk(A|b) = 3$. Si distinguono i tre casi:
i) se $\alpha = 1$ allora $rk(A) = rk(A|b)$: il sistema ha almeno una soluzione;
ii) se $\alpha = 4$ allora $rk(A) \neq rk(A|b)$: il sistema è incompatibile;
iii) se $\alpha \neq 1, 4$ allora $rk(A) = rk(A|b)$: il sistema ha almeno una soluzione.

Consideriamo il caso $\alpha = 1$, utilizzando la matrice ridotta:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

riscriviamo il sistema equivalente a quello di partenza:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

il sistema ammette quindi infinite soluzioni:

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \in \mathbb{R} \\ z = 0 \end{cases}$$

Poichè nel caso $\alpha \neq 1, 4$ la matrice A ha rango massimo, abbiamo che $\det(A) \neq 0$, quindi passiamo direttamente al metodo di Cramer.

Procediamo al calcolo del determinante di

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & 1 & 2 \\ 1 & \alpha & 3 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \alpha^2 - 5\alpha + 4 = (\alpha - 4)(\alpha - 1)$$

Il determinante è non nullo solo per $\alpha \neq 1, 4$ a riconferma di quanto detto in precedenza. Indichiamo con A_1, A_2, A_3 le matrici ottenute da A sostituendo rispettivamente la prima, la seconda e la terza colonna con la colonna dei termini noti del sistema.

$$A_1 = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & \alpha & 3 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \end{pmatrix}$$

I determinanti sono $\det(A_1) = -2(\alpha - 1)^2$, $\det(A_2) = -3\alpha(\alpha - 1)$, $(\alpha - 1)^2(\alpha + 2)$. La soluzione del sistema è data da

$$x = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = -2\frac{\alpha - 1}{\alpha - 4}$$
$$y = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = -\frac{3\alpha}{\alpha - 4}$$
$$z = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \frac{(\alpha - 1)(\alpha + 2)}{\alpha - 4}$$

per $\alpha \neq 1, 4$.

■

Esercizio 8.39. *Risolvere il seguente sistema utilizzando il metodo di Cramer:*

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 1 \\ x + 4y + 2z = 2 \\ 3x - y - z = 3 \end{cases}$$

Soluzione:

Detta A la matrice associata al sistema:

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} = 30$$

dunque possiamo applicare la regola di Cramer. Calcoliamo i determinanti delle tre matrici ottenute dalla sostituzione delle colonne:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

che sono $\det(A_1) = 36$, $\det(A_2) = -6$, $\det(A_3) = 24$. Le soluzioni sono quindi date da:

$$x = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{6}{5}$$
$$y = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = -\frac{1}{5}$$
$$z = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \frac{4}{5}$$

■

Esercizio 8.40 (Abate 9.10)**.** *Risolvere il seguente sistema utilizzando il metodo di Cramer:*

$$\begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ -x + 2y + z = 7 \\ 2x + y + 2z = 2 \end{cases}$$

Soluzione:
Esempio completamente svolto di Abate ■

Esercizio 8.41. *Risolvere il seguente sistema utilizzando il metodo di Cramer:*

$$\begin{cases} 2ix + z = -1 \\ ix + iz = i \\ x + y + z = 2 \end{cases}$$

Soluzione:
Il sistema in forma matriciale ha forma:

$$\begin{pmatrix} 2i & 0 & 1 \\ i & 0 & i \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ i \\ 2 \end{pmatrix}$$

Il determinante della matrice associata A è $\det(A) = 2 + 1 \neq 0$. Attuando la sostituzione delle colonne secondo la procedura di Cramer:

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ i & 0 & i \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2i & -1 & 1 \\ i & i & i \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 2i & 0 & -1 \\ i & 0 & i \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

i cui determinanti risultano essere: $\det(A_1) = 2i$, $\det(A_2) = 2+i$, $\det(A_3) = 2-i$. Le soluzioni sono quindi date da:

$$x = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{2i}{2+i} = \frac{2}{5} + \frac{4}{5}i$$
$$y = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{2+i}{2+i} = 1$$
$$z = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \frac{2-i}{2+i} = \frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$$

■

Esercizio 8.42. *Risolvere il seguente sistema utilizzando il metodo di Cramer:*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Verificare che l'insieme delle soluzioni del sistema forma un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ e determnarne la dimensione.

Soluzione:
La matrice associata è :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

la terza riga è combinazione lineare delle altre due, $rk(A) = 2$ e quindi il sistema ha ∞^2 soluzioni (notazione adottata anche da Sernesi).

La matrice si riduce a:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il sistema equivalente al primo ed associato ad A' è

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = -x_2 - x_4 \\ 2x_1 + 3x_3 = -2x_2 - 2x_4 \end{cases}$$

Le variabili x_2 e x_4 si considerano ora come parametri reali liberi e dunque la matrice associata al sistema sopra (non orlata dai termini noti) è :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

che ha determinante -1, le due matrici ottenute dalla sostituzione delle colonne sono:

$$B_1 = \begin{pmatrix} -x_2 - x_4 & 2 \\ -2x_2 - 2x_4 & 3 \end{pmatrix} \quad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & -x_2 - x_4 \\ 2 & -2x_2 - 2x_4 \end{pmatrix}$$

i loro determinanti sono: $\det(B_1) = x_2 + x_4$ e $\det(B_2) = 0$. Da cui si ricava:

$$x_1 = -x_2 - x_4 \qquad x_3 = 0.$$

Riscriviamo l'insieme delle soluzioni come:

$$\{(-t - s, t, 0, s) \in \mathbb{R}^4 | t, s \in \mathbb{R}\},$$

che è sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ (poichè il sistema è omogeneo) di dimensione 2.

■