CORSI DI LAUREA IN MATEMATICA E FISICA

FOGLIO DI ESERCIZI # 7– GEOMETRIA 1

Esercizio 7.1. *Determinare al variare di $k \in \mathbb{R}$ la dimensione dei due sottospazi di $\mathbb{R}^3$:*

$$U = \langle (1,1,k), (k+1,2,2), (2-k^2,1,k) \rangle$$

e

$$W = \langle (1,1,k), (k,1,2-k), (k+1,2,k+1) \rangle$$

Soluzione:

Per calcolare la dimensione di U andiamo a scrivere i suoi generatori come righe di una matrice e riduciamola. Come è noto il rango di tale matrice fornisce la dimensione di U. Analogamente per il sottospazio W.

Si ottiene:

$$\dim U = \begin{cases} 1 & \text{se } k = 1 \\ 2 & \text{se } k = -1 \\ 3 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e

$$\dim W = \begin{cases} 1 & \text{se } k = 1 \\ 3 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

■

Esercizio 7.2. *Calcolare al variare di $k \in \mathbb{R}$, la dimensione del sottospazio di $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$*

$$U = \langle kx - x^2, 1 - k + kx^2, k - (k-1)x - kx^2 \rangle$$

Soluzione:

Uno dei diversi modi di procedere è il seguente: i polinomi di $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ possono essere scritti come vettori di $\mathbb{R}^3$, quindi il generico polinomio $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ si va a rappresentare come $(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3$.

Si deve calcolare il rango della matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & k & -1 \\ 1-k & 0 & k \\ k & 1-k & -k \end{pmatrix}$$

al variare di $k \in \mathbb{R}$. Ne risulta che $\dim U = 3$ se $k \neq \frac{1}{2}$ e $\dim U = 2$ se $k = \frac{1}{2}$. ■

Esercizio 7.3. *Dimostrare che $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ è somma diretta dei sottospazi:*

$$U = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 | a_1 = a_2\} \qquad e \qquad V = \langle x - x^2 \rangle$$

Soluzione:

Si noti che $\dim U = 3$ e $\dim V = 1$, pertanto si ha che $\dim U + \dim V = 4 = \dim \mathbb{R}_{\leq 3}[x]$. Inoltre è evidente che $U \cap V = \{0\}$. Questo prova l'asserto. Analogamente si puó mostrare in via diretta che $U + V = \mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ come segue: un generico polinomio di $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ si può scrivere nella forma seguente:

$$\mathbb{R}_{\leq 3}[x] \ni p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 = a_0 + \alpha(x + x^2) + a_3x^3 + \beta(x - x^2)$$

ponendo $\alpha + \beta = a_1$ e $\alpha - \beta = a_2$. Chiaramente $a_0 + \alpha(x + x^2) + a_3x^3 \in U$ e $\beta(x - x^2) \in V$, quindi ogni vettore di $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ è dato dalla somma di un vettore del sottospazio U e di un vettore del sottospazio V. Si conclude: $U \oplus V = \mathbb{R}_{\leq 3}[x]$. ■

Esercizio 7.4. *Calcolare la somma dei sottospazi $U = \langle (1,1,1) \rangle$ e $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x + y = x - z = 0\}$ di $\mathbb{R}^3$. Trattasi di somma diretta?*

Soluzione:
La dimensione di U è 1 e una sua base è $((1,1,1))$. Per definizione, il sottospazio V si riscrive come:

$$V = \{(t, -t, t) \in \mathbb{R}^3 | t \in \mathbb{R}\},$$

quindi la sua dimensione è 1 e una sua base è $((1,-1,1))$. Il sottospazio somma $U+V$ è il generato dai vettori $(1,1,1)$, $(1,-1,1)$ che essendo linearmente indipendenti formano una base. Concludiamo che la dimensione di $U+V$ è 2 e poiché $\dim(U+V) = \dim V + \dim U$, si tratta di somma diretta. ■

Esercizio 7.5. *Sia $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in \mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ allora $p'(x)$ denoterà la sua derivata prima rispetto ad x, ovvero $p'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2$. Verificare che*

$$U = \{p(x) \in \mathbb{R}_{\leq 3}[x] | p(1) = p'(1) = 0\}$$

è un sottospazio di $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$, poi calcolarne la dimensione e una base.

Soluzione:
Tutti i polinomi di U sono dati dalle soluzioni del sistema lineare omogeneo:

$$\begin{cases} p(1) = 0 \\ p'(1) = 0 \end{cases}$$

e quindi formano uno spazio vettoriale: U è sottospazio di $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$. Il generico $p(x) \in U$ ha forma $p(x) = (x-1)^2(a+bx)$, dunque $\dim U = 2$ e una base del sottospazio è $((x-1)^2, (x-1)^2x)$.

■

Esercizio 7.6 (Abate 4.18)**.** *Siano $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Dimostare che se $|x_1| > |x_2|$ e $|y_2| > |y_1|$ allora (x, y) è una base di $\mathbb{R}^2$.*

Soluzione:
Per dimostrare che x e y siffatti sono linearmente indipendenti, verifichiamo che l'equazione $ax + by = 0$ ammette solo la soluzione banale $a = b = 0$.

Esplicitando le componenti nell'equazione vettoriale si ottiene:

$$\begin{cases} ax_1 + by_1 = 0 \\ ax_2 + by_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ax_1 = -by_1 \\ ax_2 = -by_2 \end{cases}$$

Applicando le condizioni in ipotesi si ha: $|by_1| = |ax_1| \geq |ax_2| = |by_2| \geq |by_1|$, necessariamente i simboli $\geq$ debbono essere degli $=$ e quindi si ricava che $|ax_1| = |ax_2|$ e $|by_1| = |by_2|$, l'accordo con le disuguaglianze strette dell'ipotesi si ha solo per $a = b = 0$. I vettori x e y sono linearmente indipendenti e quindi formano una base di $\mathbb{R}^2$.

■

Esercizio 7.7 (Abate 4.16)**.** *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita e W un suo sottospazio. Dimostrare che se U_1 e U_2 sono due sottospazi di V supplementari di W, allora* $\dim U_1 = \dim U_2$.

Soluzione:
La tesi è immediata conseguenza del Teorema di Grassmann:

$$\dim V = \dim W + \dim U_1 = \dim W + \dim U_2.$$

■

Esercizio 7.8 (Abate 4.19)**.** *Determinare uno spazio vettoriale reale V e tre suoi sottospazi W_1, W_2, W_3 tali che:*

$$W_1 \cap (W_2 + W_3) \neq (W_1 \cap W_2) + (W_1 \cap W_3).$$

Soluzione:
$V = \mathbb{R}^3$, $W_1 = \mathbb{R}e_1$, $W_2 = \mathbb{R}e_2$, $W_3 = \mathbb{R}(e_1 + e_2)$, dove (e_1, e_2, e_3) denota la base canonica di $\mathbb{R}^3$.

■