CORSI DI LAUREA IN MATEMATICA E FISICA

FOGLIO DI ESERCIZI # 6– GEOMETRIA 1

Esercizio 6.1 (Esercizio 5.1)**.** *Scrivere un vettore* $w \in \mathbb{R}^3$ *linearmente dipendente dal vettore* $v \equiv (-1,\ 9,\ 0)$.

SOLUZIONE:

Per esempio il vettore $w = 3v = (-3,\ 27,\ 0)$ è linearmente dipendente da v.

Potevamo anche considerare il vettore nullo $(0,\ 0,\ 0) = 0v$ che è sempre linearmente dipendente da qualsiasi altro vettore. ■

Esercizio 6.2 (Esercizio 5.2)**.** *Stabilire se i vettori* $v_1 \equiv (1,\ 5,\ 7)$ *e* $v_2 \equiv (1,\ 3,\ 4)$ *di* $\mathbb{R}^3$ *sono linearmente dipendenti.*

SOLUZIONE:

Si tratta di verificare se l'equazione vettoriale $xv_1 + yv_2 = 0$ ammette soluzioni diverse dalla soluzione nulla $x = y = 0$. Nel caso particolare di due vettori (non nulli), notiamo che x e y o sono entrambi nulli o sono entrambi non nulli. Supponendo quindi che esistano soluzioni diverse dalla soluzione nulla $x = y = 0$ ne segue che possiamo supporre $y \neq 0$ e possiamo dividere per y ottenendo $v_2 = -\dfrac{x}{y}\, v_1$.

Ovvero due vettori non nulli sono linearmente dipendenti se sono uno multiplo dell'altro. E' evidente che in questo caso v_1 non è multiplo di v_2, quindi v_1 e v_2 sono linearmente indipendenti.

Lo stesso risultato si poteva ottenere risolvendo il sistema associato all'equazione $xv_1 + yv_2 = 0$

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 5x + 3y = 0 \\ 7x + 4y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = -y \\ -5y + 3y = 0 \\ -7y + 4y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Poichè l'unica soluzione è quella nulla, v_1 e v_2 sono linearmente indipendenti.

■

Esercizio 6.3 (Esercizio 5.3)**.** *Scrivere un vettore* $w \in \mathbb{R}^4$ *linearmente dipendente dal vettore* $v \equiv (1,\ 3,\ -4,\ 2)$.

SOLUZIONE:

Per esempio il vettore $w = 2v = (2,\ 6,\ -8,\ 4)$ è linearmente dipendente da v.

■

Esercizio 6.4. *Dati i vettori* $(1,1), (1,3), (2,-1) \in \mathbb{R}^2$*, stabilire se sono linearmente dipendenti e se è possibile scrivere il secondo vettore come combinazione lineare degli altri due.*

SOLUZIONE:

I vettori sono sicuramente linearmente dipendenti perchè il massimo numero di vettori linearmente indipendenti in $\mathbb{R}^2$ è 2. Per scoprire se è possibile scrivere il secondo vettore come combinazione lineare degli altri due è necessario verificare la compatibilitâdel sistema lineare che si ottiene dall'uguaglianza

$$x(1,1) + y(2,-1) = (1,3)$$

ovvero

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

Il sistema ammette un'unica soluzione: $(\frac{7}{3}, -\frac{2}{3})$. Quindi il secondo vettore è combinazione lineare degli altri due $(1,3) = \frac{7}{3}(1,1) - \frac{2}{3}(2,-1)$. Inoltre, il primo e il terzo vettore sono linearmente indipendenti perchè la matrice che li ha per colonne, la matrice dei coefficienti del sistema ha rango due. ■

Esercizio 6.5. *Verificare che le matrici quadrate di ordine 3 triangolari superiori sono sottospazio vettoriale di* $M_3(\mathbb{R})$ *di dimensione 6.*

Esercizio 6.6. *Calcolare una base* $\mathcal{B}$ *del sottospazio (di* $\mathbb{R}^3$*)* $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x + y - z = 0\}$*, verificare che* $u = (1,1,2) \in U$ *e determinare le componenti di* u *rispetto a* $\mathcal{B}$*.*

Soluzione:
Per trovare una base di U è sufficiente osservare che i vettori di U si possono scrivere come $(x, y, x+y) = x(1,0,1) + y(0,1,1)$, una base di U è $\mathcal{B} = ((1,0,1),(0,1,1))$. Il vettore u appartiene a U poich le sue entrate soddisfano la condizione che definisce il sottospazio. Per calcolarne le componenti rispetto a $\mathcal{B}$ è necessario risolvere il sistema che equivale all'uguaglianza $x(1,0,1) + y(0,1,1) = (1,1,2)$, ovvero

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

che come unica soluzione ha $(1,1)$, formata dalle componenti di u rispetto a $\mathcal{B}$. ∎

Esercizio 6.7.

a) *Determinare per quali valori del parametro reale k i seguenti vettori di $\mathbb{R}^5$ sono linearmente dipendenti:*

$$v_1 = (0,1,-1,0,1), \qquad v_2 = (1,0,1,0,k), \qquad v_3 = (-1,2,-3,0,0).$$

b) *Per i valori di k determinati in* a)*, esprimere uno o più vettori come combinazione lineare dei rimanenti.*

Soluzione:
Cerchiamo le soluzioni dell'equazione vettoriale

$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = 0$$

riducendo a gradini la matrice associata al sistema in cui si esplicita tale equazione.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & k & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{c} II \\ I \\ III + II \\ V - II \\ IV \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & k & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ III - II \\ IV - kII \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2+k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x + 2z = 0 \\ y - z = 0 \\ (k-2)z = 0 \end{cases}$$

Dobbiamo ora distinguere due casi:

- Se $k \neq 2$ otteniamo la soluzione $x = y = z = 0$ e i tre vettori sono linearmente indipendenti.
- Se $k = 2$ il sistema diventa

$$\begin{cases} x + 2z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

Quindi per $k = 2$ i tre vettori sono linearmente dipendenti.

b) Al punto precedente abbiamo trovato che se $k = 2$ allora

$$-2tv_1 + tv_2 + tv_3 = 0 \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

In particolare ponendo per esempio $t = 1$ oteniamo

$$v_1 = \frac{1}{2}v_2 + \frac{1}{2}v_3$$
$$v_2 = 2v_1 - v_3$$
$$v_3 = 2v_1 - v_2$$

∎

Esercizio 6.8. *Dati i vettori di $\mathbb{R}^3$:*

$$v_1 \equiv (1,1,2), \;\; v_2 \equiv (2,4,6), \;\; v_3 \equiv (-1,2,5), \;\; v_4 \equiv (1,1,10)$$

determinare se v_4 è combinazione lineare di v_1, v_2 e v_3 (determinare cioè se v_4 appartiene allo spazio vettoriale generato da v_1, v_2 e v_3). In caso positivo esprimere tale combinazione lineare (nella forma più generale possibile).

Soluzione:
Si tratta di risolvere l'equazione vettoriale

$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = v_4$$

Consideriamo il sistema (non omogeneo) in tre incognite associato a tale equazione

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ x + 4y + 2z = 1 \\ 2x + 6y + 5z = 10 \end{cases}$$

Riduciamo quindi a gradini la matrice associata a tale sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 1 & 4 & 2 & | & 1 \\ 2 & 6 & 5 & | & 10 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - I \\ III - 2I \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 0 & 2 & 3 & | & 0 \\ 0 & 2 & 7 & | & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III - II \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 0 & 2 & 3 & | & 0 \\ 0 & 0 & 4 & | & 8 \end{pmatrix}$$

Tornando al sistema

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2y + 3z = 0 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 9 \\ y = -3 \\ z = 2 \end{cases}$$

Di conseguenza

$$v_4 = 9v_1 - 3v_2 + 2v_3$$

Notiamo che anziché fermarci alla matrice ridotta a gradini potevamo arrivare alla scrittura della matrice in forma normale, ovvero alla matrice che ha solo elementi sulla diagonale e questi sono tutti 1 o 0.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 0 & 2 & 3 & | & 0 \\ 0 & 0 & 4 & | & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ 1/4III \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 0 & 2 & 3 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} I + III \\ II - 3III \\ \\ \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 3 \\ 0 & 2 & 0 & | & -6 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow 1/2II \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 3 \\ 0 & 1 & 0 & | & -3 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} I - 2II \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 9 \\ 0 & 1 & 0 & | & -3 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 \end{pmatrix}$$

Ritornando al sistema in questo caso otteniamo direttamente

$$\begin{cases} x = 9 \\ y = -3 \\ z = 2 \end{cases}$$

ovvero

$$v_4 = 9v_1 - 3v_2 + 2v_3$$

■

Esercizio 6.9. *Dati i vettori di* $\mathbb{R}^3$*:*

$$v_1 \equiv (1, 1, 1), \ v_2 \equiv (-3, -2, -2), \ v_3 \equiv (2, 2, k + 4), \ v_4 \equiv (1, 3, 4)$$

determinare per quali valori del parametro reale k*,* v_4 *è combinazione lineare di* v_1*,* v_2 *e* v_3 *(determinare cioè se* v_4 *appartiene allo spazio vettoriale generato da* v_1*,* v_2 *e* v_3*). In caso positivo esprimere tale combinazione lineare (nella forma più generale possibile).*

Soluzione:
Si tratta di risolvere l'equazione vettoriale

$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = v_4$$

Consideriamo il sistema (non omogeneo) in tre incognite associato a tale equazione

$$\begin{cases} x - 3y + 2z = 1 \\ x - 2y + 2z = 3 \\ x - 2y + (k + 4)z = 4 \end{cases}$$

Riduciamo quindi a gradini la matrice associata a tale sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & | & 1 \\ 1 & -2 & 2 & | & 3 \\ 1 & -2 & k+4 & | & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II-I \\ III-II \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & k+2 & | & 1 \end{pmatrix}$$

Tornando al sistema

$$\begin{cases} x-3y+2z=1 \\ y=2 \\ (k+2)z=1 \end{cases}$$

Dobbiamo ora di distinguere due casi

- Se $k=-2$:

$$\begin{cases} x-3y+2z=1 \\ y=2 \\ 0=1 \end{cases}$$

  Quindi il sistema non ammette soluzioni, e v_4 non si può esprimere come combinazione lineare di $v_1,\ v_2,\ v_3$.

- Se $k\neq -2$:

$$\begin{cases} x=\dfrac{7k+12}{k+2} \\ y=2 \\ z=\dfrac{1}{k+2} \end{cases}$$

  e

$$v_4=\left(\frac{7k+12}{k+2}\right)\cdot v_1+2\cdot v_2+\left(\frac{1}{k+2}\right)\cdot v_3$$

■

Esercizio 6.10. *Ripetere l'esercizio precedente con i vettori*

$$v_1\equiv(1,3,1),\ \ v_2\equiv(2,k,-1),\ \ v_3\equiv(-1,k-1,0),\ \ v_4\equiv(1,15,7)$$

Soluzione:

Cerchiamo le soluzioni dell'equazione vettoriale

$$xv_1+yv_2+zv_3=v_4$$

Riduciamo a gradini la matrice associata al sistema in cui si esplicita tale equazione:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 3 & k & k-1 & | & 15 \\ 1 & -1 & 0 & | & 7 \end{pmatrix}$$

Procedendo con il metodo di Gauss otteniamo la matrice equivalente

$$\begin{matrix} \\ II-3I \\ III-I \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 0 & k-6 & k+2 & | & 12 \\ 0 & -3 & 1 & | & 6 \end{pmatrix}$$

Facciamo a questo punto una importante osservazione. Se procediamo ancora con la riduzione a gradini, per ottenere uno zero nel secondo posto della terza riga siamo costretti a fare la seguente operazione

$$\begin{matrix} \\ \\ (k-6)III+3II \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 0 & k-6 & k+2 & | & 12 \\ 0 & 0 & 4k & | & 6k \end{pmatrix}$$

Notiamo però che procedendo così abbiamo sostituito la terza riga con un suo multiplo *dipendente dal parametro*, sommato ad un multiplo non nullo della seconda. Dalla teoria sappiamo però che tale operazione è lecita solamente se il valore per cui moltiplichiamo la terza riga è diverso da zero, nel nostro caso cioè se $k\neq 6$. In caso contrario avremmo infatti sostituito la terza riga con un multiplo della seconda ottenendo perciò un sistema non più equivalente. Potremmo quindi procedere per poi controllare separatamente il caso $k=6$, ritornando al sistema che avevamo prima della operazione non lecita. Questo modo di procedere, benchè corretto, risulta piuttosto lungo e macchinoso. E' invece decisamente più conveniente procedere nel seguente modo.

Ritorniamo alla matrice ottenuta al primo passaggio della riduzione a gradini e effettuiamo uno scambio di righe

$$\begin{array}{c} \\ III \\ II \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 0 & -3 & 1 & | & 6 \\ 0 & k-6 & k+2 & | & 12 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ 3III+(k-6)II \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 0 & -3 & 1 & | & 6 \\ 0 & 0 & 4k & | & 6k \end{pmatrix}$$

Abbiamo quindi sostituito la terza riga con un suo multiplo *non nullo* sommato ad un multiplo della seconda dipendente dal parametro. Questa operazione è sempre lecita. Infatti anche per il valore critico $k = 6$ otteniamo un sistema ancora equivalente in cui la terza riga è stata sostituita con un suo multiplo non nullo. Possiamo perciò procedere senza dovere distinguere alcun caso.

Torniamo ora al sistema

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ \quad - 3y + z = 6 \\ \quad 4kz = 6k. \end{cases}$$

Per trovare le soluzioni siamo costretti a distinguere due casi.

- Se $4k \neq 0$, ovvero se $k \neq 0$, l'ultima equazione si può dividere per $4k$ per cui otteniamo la seguente soluzione

$$\begin{cases} x = \frac{11}{2} \\ y = -\frac{3}{2} \\ z = \frac{3}{2}. \end{cases}$$

  Di conseguenza se $k \neq 0$ abbiamo ottenuto la seguente (unica) combinazione lineare:

$$v_4 = \frac{11}{2}v_1 - \frac{3}{2}v_2 + \frac{3}{2}v_3.$$

- Se $k = 0$ otteniamo il seguente sistema

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ \quad - 3y + z = 6 \\ \quad 0 = 0 \end{cases}$$

  Ponendo $y = t$ otteniamo le soluzioni

$$\begin{cases} x = t + 7 \\ y = t \\ z = 3t + 6. \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

  Quindi anche se $k = 0$ il vettore v_4 si può esprimere come combinazione lineare di v_1, v_2 e v_3:

$$v_4 = (t + 7) \cdot v_1 + t \cdot v_2 + (3t + 6) \cdot v_3 \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

  In questo caso le possibili combinazioni lineari sono infinite.

■

Esercizio 6.11. *Dati i vettori di* $\mathbb{R}^3$*:*

$$v_1 \equiv (1, 2, 1), \ v_2 \equiv (k - 2, k - 4, -k - 2), \ v_3 \equiv (5, 9, 3)$$

determinare, se possibile, i valori del parametro k *per cui il vettore* v_3 *è combinazione lineare di* v_1*, e* v_2*. In caso positivo esprimere tale combinazione lineare (nella forma più generale possibile).*

Soluzione:

Si tratta di cercare (se esistono) le soluzioni dell'equazione vettoriale

$$xv_1 + yv_2 = v_3.$$

Consideriamo il sistema (non omogeneo) associato

$$\begin{cases} x + (k - 2)y = 5 \\ 2x + (k - 4)y = 9 \\ x + (-k - 2)y = 3 \end{cases}$$

Riduciamo a gradini la matrice associata

$$\begin{pmatrix} 1 & k-2 & | & 5 \\ 2 & k-4 & | & 9 \\ 1 & -k-2 & | & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II-2I \\ III-I \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & k-2 & | & 5 \\ 0 & -k & | & -1 \\ 0 & -2k & | & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ -II \\ III-2II \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & k-2 & | & 5 \\ 0 & k & | & 1 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Otteniamo quindi il sistema

$$\begin{cases} x + (k-2)y = 5 \\ ky = 1 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Dobbiamo ora distinguere due casi

- Se $k \neq 0$ otteniamo

$$\begin{cases} x = \dfrac{4k+2}{k} \\ y = \dfrac{1}{k} \end{cases}$$

  per cui

$$v_3 = \left(\frac{4k+2}{k}\right) \cdot v_1 + \frac{1}{k} \cdot v_2 \qquad \text{se } k \neq 0.$$

- Se $k = 0$:

$$\begin{cases} y & - & 2x & = & 5 \\ & & 0 & = & 1 \\ & & 0 & = & 0 \end{cases}$$

  Quindi il sistema è impossibile e in questo caso il vettore v_3 non è combinazione lineare di v_1 e v_2.

■

Esercizio 6.12. *Si considerino le matrici*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ k & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & k \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} k & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Si dica per quali valori del parametro reale k le matrici A, B, C sono linearmente indipendenti nello spazio $M_2(\mathbb{R})$.

Soluzione:

Per stabilire quando le tre matrici sono linearmente indipendenti risolviamo l'equazione $xA + yB + zC = 0$:

$$\begin{pmatrix} y + kz & ky + z \\ kx - 2y - 1z & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui si ottiene il sistema

$$\begin{cases} y + kz = 0 \\ ky + z = 0 \\ kx - 2y - 1z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 0 = 0 \\ kx = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Dobbiamo ora distinguere due casi.

- Se $k \neq 0$ otteniamo la sola soluzione $x = y = z = 0$ per cui le tre matrici sono linearmente indipendenti.
- Se $k = 0$ otteniamo la sola soluzione $x = t$, $y = z = 0$ per cui le tre matrici sono linearmente dipendenti.

■

Esercizio 6.13. *Si considerino le matrici*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & k+1 \\ 4 & k-3 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2k-2 & 2k-1 \end{pmatrix}$$

a) *Si stabilisca per quale valore di $k \in \mathbb{R}$ le matrici A, B e C sono linearmente dipendenti.*
b) *Per il valore trovato in* a) *esprimere B come combinazione lineare di A e C.*

Soluzione:

a) Per stabilire quando le tre matrici sono linearmente dipendenti risolviamo l'equazione $xA + yB + zC = 0$:

$$\begin{pmatrix} x+2y & x+(k+1)y+z \\ 2x+4y+(2k-2)z & -x+(k-3)y+(2k-1)z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui si ottiene il sistema

$$\begin{cases} x+2y=0 \\ x+(k+1)y+z=0 \\ 2x+4y+(2k-2)z=0 \\ -x+(k-3)y+(2k-1)z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 0 \\ 1 & k+1 & 1 & | & 0 \\ 2 & 4 & 2k-2 & | & 0 \\ -1 & k-3 & 2k-1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Notiamo che le matrici A, B e C sono linearmente dipendenti se il sistema ammette altre (infinite) soluzioni oltre a quella nulla $x = y = z = 0$. Riduciamo quindi a gradini la matrice associata al sistema:

$$\begin{array}{c} \\ II-I \\ III-2I \\ IV+I \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 0 \\ 0 & k-1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 2k-2 & | & 0 \\ 0 & k-1 & 2k-1 & | & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ \\ IV-II \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 0 \\ 0 & k-1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 2k-2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 2k-2 & | & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ \\ IV-III \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 0 \\ 0 & k-1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 2k-2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Dobbiamo ora distinguere due casi.

– Se $k \neq 1$ otteniamo la sola soluzione $x = y = z = 0$ per cui le tre matrici sono linearmente indipendenti.
– Se $k = 1$ otteniamo il sistema

$$\begin{cases} x+2y=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2t \\ y=t \\ z=0 \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow -2t \cdot A + t \cdot B + 0 \cdot C = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Il sistema ha infinite soluzioni e quindi le tre matrici sono linearmente dipendenti.

b) Per $k = 1$ abbiamo ottenuto al punto precedente $-2t \cdot A + t \cdot B + 0 \cdot C = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$. Ponendo per esempio $t = 1$ otteniamo $-2A + B = 0$, ovvero $B = 2A$.

■

Esercizio 6.14. *Siano dati i polinomi*

$$p_1(x) = 1 + x, \qquad p_2(x) = 1 + 2x + x^2, \qquad p_3(x) = x - x^2.$$

Esprimere, se è possibile, $f(x) = x^2 - x + 2$ *come combinazione lineare di* $p_1(x),\ p_2(x),\ p_3(x)$.

Soluzione:

Si tratta di stabilire se l'equazione

$$ap_1(x) + bp_2(x) + cp_3(x) = f(x)$$

ammette soluzioni. Esplicitando l'equazione otteniamo:

$$\begin{aligned} ap_1(x) + bp_2(x) + cp_3(x) &= a(1+x) + b(1+2x+x^2) + c(x-x^2) \\ &= (b-c)x^2 + (a+2b+c)x + (a+b) \end{aligned}$$

Quindi

$$(b-c)x^2 + (a+2b+c)x + (a+b) = x^2 - x + 2 \Rightarrow \begin{cases} b-c=1 \\ a+2b+c=-1 \\ a+b=2 \end{cases}$$

Risolviamo ora il sistema

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & | & 1 \\ 1 & 2 & 1 & | & -1 \\ 1 & 1 & 0 & | & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} III \\ \\ I \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 2 \\ 1 & 2 & 1 & | & -1 \\ 0 & 1 & -1 & | & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow II - I \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 1 & 1 & | & -3 \\ 0 & 1 & -1 & | & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III - II \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 1 & 1 & | & -3 \\ 0 & 0 & -2 & | & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_2 + x_3 = -3 \\ -2x_3 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = -2 \end{cases}$$

Quindi

$$f(x) = 3 \cdot p_1(x) - 1 \cdot p_2(x) - 2 \cdot p_3(x)$$

L'esercizio poteva essere svolto in maniera leggermente semplificata osservando che a ogni polinomio possiamo associare il vettore formato dai suoi coefficienti dopo avere scelto un ordine per l'insieme $\mathcal{B} = \{x^2, \quad x, \quad 1\}$. La giustificazione precisa di questo fatto verrà data dopo avere introdotto il concetto di base, ma possiamo intanto osservare che ogni vettore è univocamente determinato dai suoi coefficienti e che la somma e il prodotto per scalari sono definiti in maniera analoga tra vettori e tra polinomi. Di conseguenza ai polinomi $p_1(x), p_2(x)$ e $p_3(x)$ possiamo associamo i tre vettori

$$\begin{aligned} p_1 &= (0, 1, 1) \\ p_2 &= (1, 2, 1) \\ p_3 &= (-1, 1, 0) \\ f &= (1, -1, 2) \end{aligned}$$

Il polinomio $f(x)$ è combinazione lineare di $p_1(x),\ p_2(x),\ p_3(x)$ se il vettore f è combinazione lineare dei vettori $p_1,\ p_2,\ p_3$. Risolvendo l'equazione $ap_1 + bp_2 + cp_3$ otteniamo il sistema a cui è associata la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & | & 1 \\ 1 & 2 & 1 & | & -1 \\ 1 & 1 & 0 & | & 2 \end{pmatrix}$$

che è infatti la stessa che abbiamo ottenuto con il precedente metodo.

■

Esercizio 6.15. *Dimostrare che lo spazio vettoriale $M_n(\mathbb{R})$ si decompone come somma diretta del sottospazio delle matrici e del sottospazio delle matrici antisimmetriche. Calcolare la dimensione dei due sottospazi.*

SOLUZIONE:
Abbiamo visto nell'esercizio 3.5 che ogni matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ si può scrivere come come somma di una matrice simmetrica ed una antisimmetrica nel seguente modo $A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T$, inoltre la somma è diretta poiché l'unica matrice contemporaneamente simmetrica ed antisimmetrica è la matrice nulla. La dimensione dello spazio delle matrici simmetriche è $\frac{n(n+1)}{2}$, mentre quello spazio delle matrici antisimmetriche è $\frac{n(n-1)}{2}$ ■

Esercizio 6.16. *Calcolare la somma dei seguenti due sottospazi di $\mathbb{R}^3$:*

$$V = \langle(1, 1, k)\rangle \qquad U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y + z = 0\}$$

al variare di $k \in \mathbb{R}$. Per quali valori di k, $U + V$ è somma diretta?

SOLUZIONE:
Una base del sottospazio U è $((-1, 1, 0), (-1, 0, 1))$ e quindi il sottospazio $U+V = \langle(-1, 1, 0), (-1, 0, 1), (1, 1, k)\rangle$. Riducendo a gradini la matrice che ha per colonne i tre vettori generatori dello spazio somma si ottiene che i tre vettori sono linearmente indipendenti per $k \neq -2$ e quindi cosituiscono una base di $U+V$, mentre per $k = -2$ il vettore $(1, 1, k) \in U$ e quindi $U + V = U$ ■

Esercizio 6.17. *Date le matrici*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

mostrare che A è invertibile e determinare la matrice $X \in M_3(\mathbb{R})$ tale che $AX + B = O$

Soluzione:
La matrice A è di rango 3 infatti riducendola a gradini si ottiene:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III - I \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III + II \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Essendo A invertibile nell'equazione $AX = -B$ si può moltiplicare a sinistra per A^{-1} ambo i membri, ottendo $X = A^{-1}(-B)$. Essendo

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \; e \qquad X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

■

Esercizio 6.18. *Data la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

verificare che $A^2 - A - 2I_3 = O$. Dedurre che A è invertibile e calcolare la sua inversa.

Soluzione:
La verifica dell'uguaglianza $A^2 - A - 2I_3 = O$ è lasciata al lettore. Dalla stessa si ricava che $\frac{1}{2}(A(A^- I)) = I_3$, ne segue che A è invertibile e la sua inversa è

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

■

Esercizio 6.19. *Determinare, al variare del parametro reale $k \in \mathbb{R}$ il rango della matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k^2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k^3 \end{pmatrix}$$

Discutere e risolvere in $\mathbb{R}$ il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, dove $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ e $\mathbf{b} = (1, \mu, \mu^2, \mu^3)$ dove $k, \mu \in \mathbb{R}$.

Soluzione:
Per rispondere alle due domande dell'esercizio riduciamo direttamente la matrice $A|b$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 & | & \mu \\ 1 & 1 & k^2 & 1 & | & \mu^2 \\ 1 & 1 & 1 & k^3 & | & \mu^3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - I \\ III - I \\ IV - I \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & k-1 & 0 & 0 & | & \mu - 1 \\ 0 & 0 & k^2 - 1 & 0 & | & \mu^2 - 1 \\ 0 & 0 & 0 & k^3 - 1 & | & \mu^3 - 1 \end{pmatrix}$$

Analizziamo il rango di A al variare di $k \in \mathbb{R}$

- se $k \neq 1, -1$ allora $rk(A) = 4$;
- se $k = -1$ allora $rk(A) = 3$;
- se $k = 1$ allora $rk(A) = 1$.

Discutiamo ora il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

- se $k \neq 1, -1$ allora il sistema ha la seguente unica soluzione:
  $(1 - \frac{\mu^3 - 1}{k^3 - 1} - \frac{\mu^2 - 1}{k^2 - 1} - \frac{\mu - 1}{k - 1}, \frac{\mu - 1}{k - 1}, \frac{\mu^2 - 1}{k^2 - 1}, \frac{\mu^3 - 1}{k^3 - 1})$.

- se $k=1$ si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & \mu-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & \mu^2-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & \mu^3-1 \end{pmatrix}$$

e quindi ci sono soluzioni se e solo se $\mu=1$, in tal caso l'insieme delle soluzioni è
$S=\{(1-r-s-t,r,s,t) \mid r,s,t\in\mathbb{R}\}$.

- se $k=-1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & | & \mu-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & \mu^2-1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & | & \mu^3-1 \end{pmatrix}$$

ed ha soluzioni se e solo se $\mu=1$ o $\mu=-1$. Per $\mu=1$ si ha $S=\{(1-t,0,t,0) \mid t\in\mathbb{R}\}$, mentre per $\mu=-1$ risulta $S=\{(1-t,1,t,1) \mid t\in\mathbb{R}\}$.

■

Esercizio 6.20. *Determinare il rango delle seguenti matrici al variare del parametro $t\in\mathbb{R}$.*

$$A_1=\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & t+1 & -1 \\ 0 & 0 & t-3 \end{pmatrix} \qquad A_2=\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & t+1 & -1 \\ 0 & 0 & t-3 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix} \qquad A_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & t \\ 2 & 1 & 2 & t+1 \\ t & 0 & t & 0 \end{pmatrix}$$

Soluzione:

- Consideriamo la matrice A_1. Visto che A_1 è ridotta a gradini è immediato calcolarne il rango utilizzando i pivot:
  - Se $t+1$ e $t-3$ sono non nulli, ovvero se $t\neq -1,3$, allora A_1 ha tre pivot e $rk(A_1)=3$.
  - Se $t=-1$ la matrice diventa:

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III-4II \end{matrix}\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

    Quindi se $t=-1$ la matrice A_1 ha due pivot e $rk(A_1)=2$.
  - Se $t=3$ la matrice diventa:

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

    Quindi se $t=3$ la matrice A_1 ha due pivot e $rk(A_1)=2$.

- Anche se la matrice A_2 non è completamente ridotta a gradini possiamo comunque calcolarne il rango ragionando sui pivot.
  - Se $t\neq -1$ la matrice A_2 ha tre pivot e quindi $rk(A_2)=3$. Notiamo che anche nei casi particolari $t=3$ e $t=0$ otteniamo una matrice con tre pivot, infatti:
    * Se $t=3$:

$$A_2=\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ IV \\ III \end{matrix}\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

      Quindi A_2 ha effettivamente tre pivot.
    * Se $t=0$:

$$A_2=\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

      Quindi A_2 ha effettivamente tre pivot.

– Se $t = -1$ otteniamo la matrice

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III + 4II \\ IV - II \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Quindi se $t = -1$ la matrice A_2 ha due pivot e $rk(A_2) = 2$.

- Riduciamo a gradini della matrice A_3:

$$\begin{matrix} \\ II - 2I \\ III - tI \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & t \\ 0 & 1 & -4 & 1-t \\ 0 & 0 & -2t & -t^2 \end{pmatrix}$$

Se ragioniamo sui pivot otteniamo:
– Se $t \neq 0$ la matrice ha 3 pivot, quindi $rk(A_3) = 3$.
– Se $t = 0$ la matrice A_3 diventa

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

quindi ha 2 pivot e $rk(A_3) = 2$.

■