CORSI DI LAUREA IN MATEMATICA E FISICA

FOGLIO DI ESERCIZI # 5– GEOMETRIA 1

Esercizio 5.1 (Esercizio 4.5). *Si risolva il seguente sistema di equazioni lineari:*

$$\begin{cases} x+y+2z & =1 \\ (k+2)x+2y+4z & =2 \\ (1+2k)x+3y+2z & =1+2k \end{cases}$$

al variare del parametro reale k.

Soluzione:

Consideriamo la matrice associata al sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 1 \\ k+2 & 2 & 4 & | & 2 \\ 1+2k & 3 & 2 & | & 1+2k \end{pmatrix}$$

Poichè la prima colonna contiene il parametro k la scambiamo con la terza colonna (scambiando così la posizione dell'incognita x con quella dell'incognita z):

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & | & 1 \\ 4 & 2 & k+2 & | & 2 \\ 2 & 3 & 2k+1 & | & 1+2k \end{pmatrix}$$

Riduciamo ora la matrice a gradini:

$$\begin{array}{c} \\ II-2I \\ III-I \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & k & | & 0 \\ 0 & 2 & 2k & | & 2k \end{pmatrix} \to \begin{array}{c} \\ III \\ II \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 2 & 2k & | & 2k \\ 0 & 0 & k & | & 0 \end{pmatrix}$$

Dobbiamo distinguere i casi $k \neq 0$ e $k = 0$.

Tornando al sistema e ricordando lo scambio di x e z otteniamo:

$$\begin{cases} 2z+y+x=1 \\ 2y+2kx=2k \\ kx=0 \end{cases}$$

Distinguiamo i due precedenti casi.

- Se $k \neq 0$ otteniamo

$$\begin{cases} z=\dfrac{1-k}{2} \\ y=k \\ x=0 \end{cases}$$

quindi la soluzione è unica ed è $S = \left\{(0, k, \frac{1-k}{2})\right\}$.

- Se $k = 0$ invece

$$\begin{cases} 2z+y+x=1 \\ 2y=0 \\ 0=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1-2t \\ y=0 \\ z=t \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

ovvero l'insieme di ∞^1 soluzione è

$$S = \{(1-2t, 0, t) \in \mathbb{R}^3 \mid t \in \mathbb{R}\} = (1,0,0) + \langle(-2,0,1)\rangle$$

■

Esercizio 5.2 (Esempio 3.18 Ab-dF). *Studiare la compatibilitá del seguente sistema di equazioni lineari:*

$$\begin{cases} x+\lambda y+\mu z & =0 \\ \lambda x-y+\lambda\mu z & =3 \\ x+\mu y-2z & =\lambda+2 \end{cases}$$

al variare di $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

Soluzione:

Consideriamo la matrice associata al sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda & \mu & | & 0 \\ \lambda & -1 & \lambda\mu & | & 3 \\ 1 & \mu & -2 & | & \lambda+2 \end{pmatrix}$$

Effettuiamo la riduzione sulla prima colonna

$$\begin{array}{c} \\ II-\lambda I \\ III-I \end{array}\begin{pmatrix} 1 & \lambda & \mu & | & 0 \\ 0 & -1-\lambda^2 & 0 & | & 3 \\ 0 & \mu-\lambda & -2-\mu & | & \lambda+2 \end{pmatrix}$$

Scambiamo la II riga con la III

$$\begin{array}{c} \\ III \\ II \end{array}\begin{pmatrix} 1 & \lambda & \mu & | & 0 \\ 0 & \mu-\lambda & -2-\mu & | & \lambda+2 \\ 0 & -1-\lambda^2 & 0 & | & 3 \end{pmatrix}$$

Scambiamo ora la III colonna con la II, **ricordando poi lo scambio di y con z**, la riduzione è completata:

$$\begin{pmatrix} 1 & \mu & \lambda & | & 0 \\ 0 & -2-\mu & \mu-\lambda & | & \lambda+2 \\ 0 & 0 & -1-\lambda^2 & | & 3 \end{pmatrix}$$

Osserviamo che se $1+\lambda^2=0$ ovvero $\lambda \in \{i,-i\}$ il sistema non è compatibile poiché la terza equazione diventa $0=3$. Se $\mu \neq -2$ e $\lambda \neq \pm i$ il sistema ammette unica soluzione.

Se $\mu=-2$ allora la matrice diventa:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & \lambda & | & 0 \\ 0 & 0 & -2-\lambda & | & \lambda+2 \\ 0 & 0 & -1-\lambda^2 & | & 3 \end{pmatrix}$$

La seconda e la terza riga corrispondono alle equazioni del sistema

$$\begin{cases} (-\lambda^2-1)y=3 \\ (-2-\lambda)y=\lambda+2 \end{cases}$$

- Se $\lambda=-2$ ci sono infinite soluzioni aventi $y=\dfrac{-3}{5}$ e poi dalla prima equazione si ricava x in funzione di $z=t$.
- Se $\lambda \neq -2$, allora $y=-1$ che sostituito nell'equazione $(-\lambda^2-1)y=3$ ci dice che il sistema ammette infinite soluzioni solo se $\lambda=\pm\sqrt{2}$.

■

Esercizio 5.3. *Stabilire se la seguente matrice*

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & 7 \\ 1 & 1 & 4 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

è invertibile (utilizzando l'eliminazione di Gauss).

Soluzione:

La matrice non è invertibile (è singolare) [...] ■

Esercizio 5.4. *Determinare per quali $k \in \mathbb{C}$ la matrice*

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & i & 1 \\ 3 & 1 & k & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 1 & k \end{pmatrix}$$

è invertibile.

Soluzione:
La matrice risulta invertibile se $\lambda \neq (2 \pm \sqrt{7})i[...]$ ∎

Esercizio 5.5. *Sia dato l'insieme*

$$V = \{p(x) \in \mathbb{R}_{\leq 3}[x] \mid p(1) = 0 \}$$

Dimostrare che l'insieme V è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$.

Soluzione:
Un generico elemento di V ha la forma $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$. La verifica tramite la definizione è facile: $p, q \in V$ allora $(p+q)(1) = p(1) + q(1) = 0$ e quindi $p + q \in V$. In modo analogo $\lambda p(x) \in V$, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ dato che $\lambda p(1) = 0$.

Un modo diverso, anticipando qualche concetto futuro è osservare che $p(1) = 0$ si traduce nella condizione $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0$, quindi all'insieme di polinomi V corrisponde l'insieme:

$$W = \left\{(a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3) \in \mathbb{R}^4 \mid a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0\right\}$$

cioè l'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo formato dalla sola equazione $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0$.

L'insieme W, e quindi l'insieme V, è uno spazio vettoriale in quanto si tratta dell'insieme delle soluzioni di un sistema omogeneo. ∎

Esercizio 5.6. *Mostrare che l'insieme*

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} 3a & -a+b \\ a & -2a+b \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \,\middle|\, a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

è un sottospazio vettoriale di $M_2(\mathbb{R})$.

Soluzione:
Poiché W contiene la matrice nulla (ed è quindi non vuoto) basta verificare le due proprietà seguenti:

- SOMMA. Siano

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3a_1 & -a_1+b_1 \\ a_1 & -2a_1+b_1 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 3a_2 & -a_2+b_2 \\ a_2 & -2a_2+b_2 \end{pmatrix}$$

  due generici elementi di W. Allora

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 &= \begin{pmatrix} 3a_1 + 3a_2 & -a_1 + b_1 - a_2 + b_2 \\ a_1 + a_2 & -2a_1 + b_1 - 2a_2 + b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3(a_1+a_2) & -(a_1+a_2) + (b_1+b_2) \\ (a_1+a_2) & -2(a_1+a_2) + (b_1+b_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3a & -a+b \\ a & -2a+b \end{pmatrix} \quad \text{con} \begin{cases} a = a_1 + a_2 \\ b = b_1 + b_2 \end{cases} \end{aligned}$$

  Quindi $A_1 + A_2 \in W$.
- PRODOTTO per scalari. Sia

$$A = \begin{pmatrix} 3a & -a+b \\ a & -2a+b \end{pmatrix}$$

  un generico elemento di W e $\lambda \in \mathbb{R}$. Allora

$$\lambda A = \begin{pmatrix} 3(\lambda a) & -\lambda a + \lambda b \\ \lambda a & -2(\lambda a) + \lambda b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a' & -a'+b' \\ a' & -2a'+b' \end{pmatrix} \quad \text{con} \begin{cases} a' = \lambda a \\ b' = \lambda b \end{cases}$$

  Quindi $\lambda A \in W$.

∎

Esercizio 5.7. *Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} -8 & -7 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ e sia S il sottoinsieme di $M_2(\mathbb{R})$ costituito dalle matrici che commutano con A:*

$$S = \{M \in M_2(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$$

Mostrare che S è un sottospazio vettoriale di $M_2(\mathbb{R})$.

Soluzione:
Osserviamo che $0 \in S$. Dobbiamo dimostrare la chiusura rispetto alla somma e al prodotto per scalari.

- **Somma.** Siano M_1 e M_2 due matrici che commutano con A. Allora

$$A(M_1+M_2) = AM_1 + AM_2 = M_1A + M_2A = (M_1+M_2)A$$

Quindi anche la matrice M_1+M_2 commuta con A e appartiene a S.
- **prodotto.** Sia M una matrice che commuta con A, e sia $\lambda \in \mathbb{R}$. Allora

$$A(\lambda M) = \lambda AM = \lambda MA = (\lambda M)A$$

Quindi anche la matrice λM commuta con A e appartiene a S.

Scriviamo esplicitamente le soluzioni di S imponendo la condizione $AM = MA$.

$$\begin{aligned} AM &= \begin{pmatrix} -8a-7c & -8b-7d \\ a & b \end{pmatrix}, \\ MA &= \begin{pmatrix} -8a+b & -7a \\ -8c+d & -7c \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

ove $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Quindi

$$MA = AM \quad \Leftrightarrow \begin{cases} -8a-7c = -8a+b \\ -8b-7d = -7a \\ a = -8b+d \\ b = -7c \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} b+7c = 0 \\ 7a-8b-7d = 0 \\ a+8b-d = 0 \end{cases}$$

Si tratta quindi di risolvere il sistema omogeneo:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 8 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 0 & 0 \\ 7 & -8 & 0 & -7 & 0 \end{array}\right) \to \begin{matrix} \\ \\ III-7I \end{matrix} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 8 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -56 & 0 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\begin{matrix} \\ \\ III-8II \end{matrix} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 8 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \begin{cases} a = -8t+s \\ b = -7t \\ c = t \\ d = s \end{cases} \qquad \text{per ogni } s,t \in \mathbb{R}$$

Quindi gli elementi di S sono del tipo

$$M = \begin{pmatrix} -8t+s & -7t \\ t & s \end{pmatrix}$$

Ovvero

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} -8 & -7 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} s \in M_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; \forall s,t \in \mathbb{R} \right\}$$

■

Esercizio 5.8. *Sia*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

e sia $S = \{M \in M_2(\mathbb{R}) \mid AM = MA = 0\}$. *Dimostrare che* S *è un sottospazio vettoriale di* $M_2(\mathbb{R})$ *e calcolarne la dimensione.*

Soluzione:

Sia

$$M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$$

la generica matrice di $M_2(\mathbb{R})$. Cominciamo a calcolare gli elementi di S:

$$AM = \begin{pmatrix} x-z & y-w \\ -2x+2z & -2y+2w \end{pmatrix} = 0 \ \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = w \end{cases}$$

$$MA = \begin{pmatrix} x-2y & -x+2y \\ z-2w & -z+2w \end{pmatrix} = 0 \ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ z = 2w \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = 2t \\ w = t \end{cases}$$

$$\Rightarrow S = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot t \in M_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}$$

Definiamo la matrice B ponendo:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

S è quindi formato dai multilpli di B. E' perciò immediato dimostare che si tratta di un sottospazio vettoriale di $M_2(\mathbb{R})$:

- SOMMA. Se A_1 e A_2 appartengono a S, allora $A_1 = t_1 \cdot B$ e $A_2 = t_2 \cdot B$ per opportuni $t_1, t_2 \in S$, quindi
$$A_1 + A_2 = t_1 \cdot B + t_2 \cdot B = (t_1 + t_2) \cdot B \ \in \ S$$
- PRODOTTO per scalari. Sia $A = t \cdot B$ un generico elemento di S e $\lambda \in \mathbb{R}$, allora
$$\lambda A = \lambda \cdot t \cdot B = (\lambda \cdot t) \cdot B \ \in \ S$$

■

Esercizio 5.9. *Sia $A \in M_n(\mathbb{K})$. Definiamo l'applicazione $\mathbb{K}[X] \ni P \longmapsto P(A) \in M_n(\mathbb{K})$ (di valutazione in A) ponendo:*

$$P(A) := a_d A^d + \ldots + a_1 A + a_0 I_n \quad \text{se} \ \ P(x) = a_d x^d + \ldots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{K}[x].$$

Provare le seguenti affermazioni.

(1) *$(P+Q)(A) = P(A) + Q(A)$, $(kP)(A) = kP(A)$ e $(PQ)(A) = P(A)Q(A)$ per ogni $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ e $k \in \mathbb{K}$.*
(2) *Se $x \in \mathbb{K}^n$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ sono tali che $Ax = \lambda x$, allora $P(A)x = P(\lambda)x$.*

Soluzione:
Verifica diretta. □

Esercizio 5.10. *Sia $A \in M_n(\mathbb{K})$ una matrice triangolare inferiore (rispettivamente superiore) avente tutti gli elementi diagonali a_{ii} diversi da zero. Si dimostri che A è invertibile e che l'inversa A^{-1} è ancora triangolare inferiore (rispettivamente superiore) con elemento diagonale di posto (i,i) uguale a a_{ii}^{-1}.*

Soluzione:
A è equivalente per righe a I_n, dunque è invertibile e A^{-1} è della stessa forma (vedi Osservazione 8 a pagine 46 del Sernesi). □

Matrici a blocchi. Sia $\mathbb{K}$ un campo, siano $m, n \in \mathbb{N}^* := \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$. Spesso è utile *partizionare a blocchi* la matrice A, cioè scrivere A come segue. Consideriamo $m_1, \ldots, m_p, n_1, \ldots, n_q \in \mathbb{N}^*$

tali che $m_1 + m_2 + \ldots + m_p = m$[1] e $n_1 + n_2 + \ldots + n_q = n$ per qualche $p, q \in \mathbb{N}^*$. Poniamo

$$A = (A_{ij})_{i,j} = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1j} & \cdots & A_{1q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{i1} & \cdots & A_{ij} & \cdots & A_{iq} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{p1} & \cdots & A_{pj} & \cdots & A_{pq} \end{pmatrix},$$

ove $A_{ij} \in M_{m_i,n_j}(\mathbb{K})$ per ogni $i \in \{1,\ldots,p\}$ e $j \in \{1,\ldots,q\}$. Per evidenziare il fatto che gli "elementi" A_{ij} della precedente rappresentazione di A sono matrici, si scrive anche

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} A_{11} & \cdots & A_{1j} & \cdots & A_{1q} \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline A_{i1} & \cdots & A_{ij} & \cdots & A_{iq} \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline A_{p1} & \cdots & A_{pj} & \cdots & A_{pq} \end{array}\right).$$

Esercizio 5.11. *Siano $A \in M_2(\mathbb{R})$, $B \in M_{2,3}(\mathbb{R})$ e $C \in M_{1,2}(\mathbb{R})$ le matrici definite ponendo*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \; e \; C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si scriva esplicitamente la seguente matrice a blocchi $E \in M_{3,5}(\mathbb{K})$:

$$E = \left(\begin{array}{c|c} A^T A & B \\ \hline CA & CB \end{array}\right).$$

Soluzione:
Vale:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \square$$

Esercizio 5.12. *Siano $m, n, \ell \in \mathbb{N}^*$ e siano $m_1+\ldots+m_p = m$, $n_1+\ldots+n_q = n$ e $\ell_1+\ldots+\ell_r = \ell$ partizioni di m, n e ℓ rispettivamente. Consideriamo le matrici a blocchi $A = (A_{ij})_{i,j} \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ e $B = (B_{jk})_{j,k} \in M_{n,\ell}(\mathbb{K})$ con $A_{ij} \in M_{m_i,n_j}(\mathbb{K})$ e $B_{jk} \in M_{n_j,\ell_k}(\mathbb{K})$ per ogni $i \in \{1,\ldots,p\}$, $j \in \{1,\ldots,q\}$ e $k \in \{1,\ldots,r\}$. Provare che AB è uguale alla matrice a blocchi $(C_{ik})_{i,k}$, ove $C_{ij} = \sum_{j=1}^q A_{ij}B_{jk} \in M_{m_i,\ell_k}(\mathbb{K})$ per ogni $i \in \{1,\ldots,p\}$ e $k \in \{1,\ldots,r\}$:*

$$AB = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1j} & \cdots & A_{1q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{i1} & \cdots & A_{ij} & \cdots & A_{iq} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{p1} & \cdots & A_{pj} & \cdots & A_{pq} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1k} & \cdots & B_{1r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ B_{j1} & \cdots & B_{jk} & \cdots & B_{jr} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ B_{q1} & \cdots & B_{qk} & \cdots & B_{qr} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & \sum_{j=1}^q A_{ij}B_{jk} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}.$$

In altre parole, AB si può calcolare effettuando il prodotto "riga per colonna" a blocchi.

Soluzione:
Siano $\alpha \in \{1,\ldots,m\}$ e $\beta \in \{1,\ldots,n\}$. Calcoliamo l'elemento $[AB]_{\alpha\beta}$ di AB di posto (α,β). Anzitutto, osserviamo che esistono, e sono unici, $i \in \{1,\ldots,p\}$, $t \in \{1,\ldots,m_i\}$, $j \in \{1,\ldots,q\}$ e $s \in \{1,\ldots,n_j\}$ tali

[1] Una decomposizione di m in somma di interi positivi si dice *partizione di m*.

che $m_1 + \ldots + m_{i-1} + t = \alpha$ e $n_1 + \ldots + n_{j-1} + s = \beta$.[2] Vale:

$$[AB]_{\alpha\beta} = \left(A_{i1}^{(t)} \middle| \cdots \middle| A_{ij}^{(t)} \middle| \cdots \middle| A_{iq}^{(t)}\right) \begin{pmatrix} B_{j1,(s)} \\ \hline \vdots \\ \hline B_{jk,(s)} \\ \hline \vdots \\ \hline B_{jq,(s)} \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{q} A_{ij}^{(t)} B_{jk,(s)} = \sum_{j=1}^{q} [A_{ij}B_{jk}]_{ts} = \Big[\sum_{j=1}^{q} A_{ij}B_{jk}\Big]_{ts}. \ \square$$

Esercizio 5.13. *Siano $m, n \in \mathbb{N}^*$. Definiamo il* prodotto tensore[3] $\otimes : M_m(\mathbb{K}) \times M_n(\mathbb{K}) \longrightarrow M_{mn}(\mathbb{K})$ *tra matrici quadrate di ordine m e n ponendo:*

$$A \otimes B := \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} a_{11}B & \cdots & a_{1j}B & \cdots & a_{1m}B \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline a_{i1}B & \cdots & a_{ij}B & \cdots & a_{im}B \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline a_{m1}B & \cdots & a_{mj}B & \cdots & a_{mm}B \end{array}\right), \quad \textit{ove } A = (a_{ij})_{i,j}.$$

Siano $A, C \in M_m(\mathbb{K})$, $B, D \in M_n(\mathbb{K})$ e $k \in \mathbb{K}$. Verificare che valgono le seguenti affermazioni.

(1) $A \otimes (B + D) = A \otimes B + A \otimes D$ *e* $(A + C) \otimes B = A \otimes B + C \otimes B$.
(2) $(kA) \otimes B = A \otimes (kB) = k(A \otimes B)$.
(3) $(A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T$.
(4) $I_m \otimes I_n = I_{mn}$.
(5) $(A \otimes B)(C \otimes D) = (AB) \otimes (CD)$.
(5′) $A \otimes B$ *è invertibile se e soltanto se A e B lo sono. Inoltre in questo caso, si ha:*

$$(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}.$$

Soluzione:
Da (1) a (5) per verifica diretta. (5′) segue subito da (5). $\square$

Esercizio 5.14. *Provare che il prodotto tensore tra matrici definito nell'esercizio precedente è associativo:*

$$(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C)$$

per ogni $A \in M_m(\mathbb{K})$, $B \in M_n(\mathbb{K})$ e $C \in M_\ell(\mathbb{K})$.

Soluzione:
Verifica diretta. $\square$

Sottomatrici. Sia $A = (a_{ij})_{i,j} \in M_{m,n}(\mathbb{K})$. Una *sottomatrice* di A è una matrice ottenuta estraendo alcune righe ed alcune da A. Più precisamente, dati $i_1, \ldots, i_p, j_1, \ldots, j_q \in \mathbb{N}^*$ tali che $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leq m$ e $1 \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_q \leq n$, la sottomatrice di A ottenuta estraendo le righe $i_1, \ldots, i_p$ e le colonne $j_1, \ldots, j_q$ si indica con $A(i_1, \ldots, i_p \,|\, j_1, \ldots, j_q)$ e si definisce ponendo

$$A(i_1, \ldots, i_p \,|\, j_1, \ldots, j_q) := (a_{i_\alpha, j_\beta})_{\alpha,\beta},$$

con $\alpha \in \{1, \ldots, p\}$ e $\beta \in \{1, \ldots, q\}$. Se $p = q$ e $i_\alpha = j_\alpha$ per ogni $\alpha \in \{1, \ldots, p\}$, allora $A(i_1, \ldots, i_p \,|\, j_1, \ldots, j_p)$ si dice *sottomatrice principale* di A di ordine p. Se in aggiunta $i_\alpha = j_\alpha = \alpha$ per ogni $\alpha \in \{1, \ldots, p\}$, allora $A(i_1, \ldots, i_p \,|\, j_1, \ldots, j_p) = A(1, 2, \ldots, p \,|\, 1, 2, \ldots, p)$ si dice *sottomatrice principale di testa* di A di ordine p.

Esercizio 5.15. *Sia A la seguente matrice in $M_{4,5}(\mathbb{C})$:*

$$A := \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 & -3 & -\mathrm{i} & -7 \\ 0 & 0 & 2\mathrm{i} & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & \mathrm{i} & -\mathrm{i} & 1-\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

[2] L'espressione $m_1 + \ldots + m_{i-1}$ è da considerarsi uguale a 0 se $i = 1$.
[3] "$\otimes$" viene anche detto *prodotto di Kronecker*.

Si scrivano: la sottomatrice principale di testa A_1 di A di ordine 3, la sottomatrice principale A_2 di A di ordine 4 (non contenente la prima colonna di A) e la sottomatrice $A_3 := A(1,2,4\,|\,2,5)$ di A.

Soluzione:

Ecco le sottomatrici richieste:

$$A_1 := \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2\mathrm{i} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 := \begin{pmatrix} 0 & -3 & -\mathrm{i} & -7 \\ 0 & 2\mathrm{i} & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & \mathrm{i} & -\mathrm{i} & 1-\mathrm{i} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -7 \\ 0 & 4 \\ -1 & 1-\mathrm{i} \end{pmatrix}. \ \square$$

Esercizio 5.16 (Fattorizzazione LU)**.** *Sia A una matrice in $M_n(\mathbb{K})$ avente tutte le sottomatrici principali di testa invertibili. Si dimostri che esistono, e sono uniche, una matrice unitriangolare inferiore $L \in M_n(\mathbb{K})$ (cioè L è triangolare inferiore e tutti i suoi elementi diagonali sono uguali a 1) ed una matrice tringolare superiore U tali che $A = LU$.*[4]

Soluzione:

Cominciamo dimostrando l'esistenza. Procediamo per induzione su $n \geq 1$.

$\underline{\boldsymbol{n=1}}$. Basta porre $L := (1)$ e $U := (a_{11})$.

$\underline{\boldsymbol{n \Rightarrow n+1}}$. Consideriamo una matrice $A \in M_{n+1}(\mathbb{K})$ avente tutte le sottomatrici principali di testa A_k di ordine k invertibili. Scriviamo A a blocchi come segue:

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_n & b \\ \hline c & a_{n+1,n+1} \end{array}\right)$$

per adeguati vettori $b \in \mathbb{K}^n = M_{n,1}(\mathbb{K})$ e $c \in M_{1,n}(\mathbb{K})$. Poiché tutte le sottomatrici principali di testa di A_n sono invertibili, per ipotesi induttiva, esistono $L_n, U_n \in M_n(\mathbb{K})$ tali che L_n è unitriangolare inferiore, U_n è triangolare superiore e $A_n = L_n U_n$. Osserviamo che, poichè L_n è invertibile (vedi Esercizio 5.2), anche U_n lo è . Infatti, vale $U_n = (L_n)^{-1} A_n$ e quindi $(U_n)^{-1} = (A_n)^{-1} L_n$. Definiamo i vettori $u \in \mathbb{K}^n$ e $v \in M_{1,n}(\mathbb{K})$ ponendo $u := (L_n)^{-1} b$ e $v := c(U_n)^{-1}$. Definiamo inoltre le matrici $L, U \in M_{n+1}(\mathbb{K})$ con L unitriangolare inferiore e U trangolare superiore ponendo:

$$L := \left(\begin{array}{c|c} L_n & \mathbf{0} \\ \hline v & 1 \end{array}\right) \quad \text{e} \quad U := \left(\begin{array}{c|c} U_n & u \\ \hline \mathbf{0} & a_{n+1,n+1} - vu \end{array}\right),$$

ove il simbolo $\mathbf{0}$ indica matrici nulle di adeguate dimensioni. eseguaedo il prodotto LU a blocchi si ottiene:

$$LU = \left(\begin{array}{c|c} L_n & \mathbf{0} \\ \hline v & 1 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c} U_n & u \\ \hline \mathbf{0} & a_{n+1,n+1} - vu \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} L_n U_n & L_n u \\ \hline v U_n & vu + a_{n+1,n+1} - vu \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} A_n & b \\ \hline c & a_{n+1,n+1} \end{array}\right) = A$$

Passiamo all'unicità. Supponiamo che $L_1 U_1 = A = L_2 U_2$ siano due fattorizzazioni LU di A. Poihé le L_i e le U_i sono invertibili, vale $(L_2)^{-1} L_1 = U_2 (U_1)^{-1}$. D'altra parte, $(L_2)^{-1} L_1$ è unitriangolare inferiore e $U_2 (U_1)^{-1}$ è triangolare superiore. Segue che $(L_2)^{-1} L_1 = I_n = U_2 (U_1)^{-1}$ e quindi $L_1 = L_2$ e $U_1 = U_2$. $\square$

[4]Questa fattorizzazione è una delle tecniche utilizzate in Analisi Numerica per la risoluzione "veloce" di sistemi lineari quadrati: per risolvere $Ax = b$, si scrive $A = LU$ e si risolvono successivamente i sistemi lineari $Ly = b$ in y e $Ux = y$ in x. La fattorizzazione LU può essere generalizzata ad ogni matrice in $M_n(\mathbb{K})$.