CORSI DI LAUREA IN MATEMATICA E FISICA

FOGLIO DI ESERCIZI # 3– GEOMETRIA 1

Esercizio 3.1. *Per quale $t \in \mathbb{R}$, la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3t-2 & -1 \\ t^2 & 3 & t^2+4 \\ -1 & 4t & 1 \end{pmatrix}$$

è simmetrica?

SOLUZIONE:
Per definizione, A è simmetrica se e solo se $A = A^T$. Calcolo della trasposta

$$A^T = \begin{pmatrix} 0 & t^2 & -1 \\ 3t-2 & 3 & 4t \\ -1 & t^2+4 & 1 \end{pmatrix}$$

allora A è simmetrica se e solo se:

$$\begin{cases} t^2 = 3t-2 \\ t^2+4 = 4t \end{cases}$$

ovvero $t = 2$. ■

Esercizio 3.2. *Date le matrici*

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) stabilire se A è ortogonale e determinare A^{-1};
b) si determini $X \in M_3(\mathbb{R})$ tale che $AX + 3B = 0$, dove 0 denota la matrice nulla 3×3.

SOLUZIONE:
a) Per definizione, $A \in M_n(\mathbb{R})$ è ortogonale se e solo se $AA^T = A^TA) = I_n$. Calcolo della trasposta:

$$A^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{4}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Verifica dell'ortogonalitå:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{4}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A è ortogonale e quindi $A^{-1} = A^T$.
b)A è invertibile perchè ortogonale, quindi è possibile calcolare:

$$AX + 3B = 0$$

$$A^{-1}AX + 3A^{-1}B = A^{-1}0$$

$$X = -3A^{-1}B$$

Esplicitamente:

$$X = -3 \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{4}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{2}} & -\frac{3}{\sqrt{2}} \\ 2 & -3 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{2}} & -\frac{9}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

■

Esercizio 3.3. *Siano $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ simmetriche.*
a) AB è simmetrica?
b) $A+B$ è simmetrica?
c) $A-B$ è simmetrica?

SOLUZIONE:
a) Per ipotesi $A = A^T$ e $B = B^T$.

$$(AB)^T = B^T A^T = BA,$$

in generale AB non è simmetrica poichè il prodotto riga per colonna non è commutativo.
b) Bisogna verificare $A + B = (A + B)^T$:

$$(A + B)^T = A^T + B^T = A + B,$$

$A + B$ è simmetrica.
c) $A - B$ è simmetrica.

■

Esercizio 3.4. *Provare che*

a) $\forall A \in M_n(\mathbb{K})$ la matrice $A + A^T$ è simmetrica;
b) $\forall A \in M_n(\mathbb{K})$ la matrice $A - A^T$ è antisimmetrica.

SOLUZIONE:
a) Sia $A \in M_n(\mathbb{K})$, basta verificare che $(A + A^T)^T = A + A^T$:

$$(A + A^T)^T = A^T + (A^T)^T = A^T + A = A + A^T,$$

si ha che $A + A^T$ è simmetrica.
b) Qui invece si verifica che $(A - A^T)^T = -(A - A^T)$:

$$(A - A^T)^T = A^T - (A^T)^T = A^T - A = -(A - A^T),$$

si ha che $A - A^T$ è antisimmetrica.

■

Esercizio 3.5. *Si dimostri che, per ogni matrice $M \in M_n(\mathbb{K})$, esistono, e sono uniche, una matrice simmetrica $S \in M_n(\mathbb{K})$ e una matrice antisimmetrica $A \in M_n(\mathbb{K})$ tali che $M = S + A$.*

SOLUZIONE:
Definiamo $S := \frac{M+M^T}{2}$ e $A := \frac{M-M^T}{2}$. Valgono: $S^T = S$, $A^T = -A$ e $M = S + A$, come desiderato. Proviamo ora l'unicit. Supponiamo che $S_1 + A_1 = M = S_2 + A_2$ con S_1 e S_2 simmetriche, e A_1 e A_2 antisimmetriche. Poich $S_1 - S_2 = A_2 - A_1$, le matrici $S_1 - S_2$ e $A_2 - A_1$ sono sia simmetriche che antisimmetriche. Segue che $S_1 - S_2 = 0 = A_2 - A_1$, ovvero $S_1 = S_2$ e $A_1 = A_2$. ■

Sia $\mathbb{K}$ un campo (per esempio $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$). Per ogni intero positivo n, denotiamo con $M_n(\mathbb{K})$ l'insieme delle matrici quadrate di ordine n a coefficienti in $\mathbb{K}$.

Esercizio 3.6 (Esercizio 7.18 di Ab-deF[1])**.** *Si determinino tutte le matrici $A \in M_n(\mathbb{K})$ che commutano con ogni altra matrice di $M_n(\mathbb{K})$, cioè tali che $AB = BA$ per ogni $B \in M_n(\mathbb{K})$.*

SOLUZIONE:
La condizione $AB = BA$ è per ipotesi verificata per ogni $B \in M_n(\mathbb{K})$, quindi deve essere vero che $AE_{i,j} = E_{i,j}A$ per tutte le matrici elementari $E_{i,j}$, ($E_{i,j}$ è la matrici tutta nulla tranne nel posto (i, j) dove c'è 1). Osserviamo che la matrice $AE_{i,i}$ è la matrice tutta nulla tranne la colonna i-esima che coincide con la i-esima colonna di A, mentre $E_{i,i}A$ è la matrice tutta nulla tranne la riga i-esima che coincide con la i-esima riga di A. Dalle condizioni $AE_{i,i} = E_{i,i}A$, per ogni i segue che A è una matrice diagonale. Siano $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ gli elementi della diagonale principale. Consideriamo ora le uguaglianze ricavate usando le matrici $E_{i,j}$, con $i \neq j$. La matrice $AE_{i,j}$, è tutta nulla tranne la j-esima colonna che è data dalla i-esima colonna di A; essendo A diagonale, l'unico elemento non nullo della matrice $AE_{i,j}$ è l'elemento di posto (i, j) che concide con λ_i. Per ragioni analoghe $E_{i,j}A$ è tutta nulla, tranne la i-esima riga che coincide con la j-esima di riga di A e quindi l'unico elemento non nullo è l'elemento di posto (i, j) che coincide con λ_j. Da queste uguaglianze segue che $\lambda_i = \lambda_j$, per ogni i e j e quindi $A = \lambda I$ ■

[1]Ab-deF sta ad indicare l'eserciziario "Esercizi di geometria" di Abate e de Fabritiis.

Esercizio 3.7 (soluzione proposta in BFL [2]). *Sia $A \in M_n(\mathbb{K})$ una matrice strettamente triangolare superiore, cioè tale che $a_{ij} = 0$ per ogni $i \geq j$ se $A = (a_{ij})_{i,j}$. Si provi che $A^n = 0$.*

SOLUZIONE:

Per ogni $j \in \{1, dots, n-1\}$ chiamiamo **j-esima parallela alla diagonale principale di una matrice A** l'insieme degli elementi $[A]_{h,h+j}$ con $1 \leq h \leq n-j$ (con la notazione $[A]_{i,j}$ nell'esercizio indichiamo per maggior comodità l'elemento di posto (i,j) della matrice A, solitamente scritto come $a_{i,j}$) e denotiamo tale parallela $P_j(A)$. Indichiamo con $P_0(A)$ la diagonale principale di A.

Dimostriamo per induzione che per ogni $k \geq 1$ la matrice A^k è ancora triangolare superiore e le parallele $P_0(A^k), \ldots, P_{k-1}(A^k)$ sono tutte nulle, ossia $[A^k]_{i,j} = 0$ per ogni $i \geq j - k + 1$. Evidentemente ciò prova che per $k = n$, la matrice A^n è nulla.

Per $k = 1$ la tesi non è altro che l'ipotesi che A sia strettamente triangolare superiore. Supponiamo dunque che la tesi sia vera per k e dimostriamola per $k+1$. Dobbiamo provare che tutti gli elementi di A^{k+1} di posto i, j con $i \geq j - k$ sono nulli. Si ha

$$[A^{k+1}]_{i,j} = [AA^k]_{i,j} = \sum_{h=1}^{n} [A]_{i,j}[A^k]_{h,j} = \sum_{h=1}^{j-k} [A]_{i,j}[A^k]_{h,j} + \sum_{h=j-k+1}^{n} [A]_{i,j}[A^k]_{h,j}.$$

Ma ora

- la prima sommatoria è nulla in quanto se $1 \leq h \leq j-k$ allora $i \geq j-k \geq h$, e quindi, dato che A è strettamente triangolare superiore $[A]_{i,h} = 0$;
- la seconda sommatoria è nulla in quanto, per ipotesi di induzione, se $h \geq j-k+1$ si ha $[A^k]_{h,j} = 0$.

Questo completa la dimostrazione.

■

Esercizio 3.8. *Sia $A \in M_n(\mathbb{K})$. Una matrice $B \in M_n(\mathbb{K})$ si dice* inversa sinistra di A (*risp.* inversa destra di A) *se $BA = I_n$ (risp. $AB = I_n$). Si dimostrino le seguenti affermazioni:*

(a) *Se B è una inversa sinistra di A e C è una inversa destra di A, allora A è invertibile e vale $A^{-1} = B = C$.*
(b) *A è invertibile se e soltanto se A ammette sia un'inversa sinistra che un'inversa destra.*

SOLUZIONE:

(a) È sufficiente far vedere che $B = C$: $B = BI_n = B(AC) = (BA)C = I_nC = C$.
(b) Se A è invertibile, allora, per definizione di inversa, A^{-1} è sia inversa sinistra che destra. Viceversa, se A ammette sia inversa sinistra che destra, allora A è invertibile per il precedente punto (a). ■

Prima di proseguire con gli esercizi, ricordiamo la nozione di gruppo e definiamo quella di sottogruppo.

Definizione. Un *gruppo* è una coppia $(G, *)$, dove G è un insieme non–vuoto e $*$ è una operazione binaria su G, cioè una applicazione $* : G \times G \longrightarrow G$, tale che:

(1) $*$ è associativa, cioè $a * (b * c) = (a * b) * c$ per ogni $a, b, c \in G$.
(2) Esiste un elemento e di G, detto *elemento neutro* (rispetto a $*$), tale che $a * e = e * a = a$ per ogni $a \in G$. Si può dimostrare che tale elemento è unico.
(3) Per ogni $a \in G$, esiste un elemento b di G, detto *inverso di* a (rispetto a $*$), tale che $a*b = b*a = e$. Tale elemento b è unico e si indica col simbolo a^{-1}.

Per semplicità si dice spesso che G è un gruppo, sottointendendo che l'operazione $*$ è stata fissata.

Il gruppo $(G, *)$ (o semplicemente G) si dice *gruppo abeliano* se, in aggiunta alle precedenti tre proprietà, vale anche la seguente:

(4) l'operazione $*$ è commutativa, cioè $a * b = b * a$ per ogni $a, b \in G$. $\Diamond$

Osservazione. Quando si parla di gruppi abeliani, usualmente si utilizza la notazione additiva, cioè "$*$" si indica con "$+$", "e" con "0" e "a^{-1}" con "$-a$".

Definizione. Sia $(G, *)$ un gruppo con elemento neutro e. Un sottoinsieme G' di G si dice *sottogruppo* di G se l'operazione $*$ induce una struttura di gruppo su G', cioè se valgono le seguenti proprietà:

(1′) $e \in G'$;
(2′) $ab^{-1} \in G'$ per ogni $a, b \in G'$.

[2]BFL sta ad indicare l'eserciziario "Problemi risolti di algebra lineare" di Broglia, Fortuna e Luminati.

Osservazione. Nella definizione precedente la condizione $(2')$ può sostituita con la seguente: $(2'')$ $ab \in G'$ e $a^{-1} \in G'$ per ogni $a, b \in G'$.

Esercizio 3.9. *Siano n un intero positivo e sia* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) := \{A \in M_n(\mathbb{K}) \mid A$ *è invertibile*$\}$. *Si dimostri che* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, *dotato del prodotto matriciale, è un gruppo (non abeliano se $n \geq 2$). Tale gruppo viene detto* gruppo lineare generale di ordine n (su $\mathbb{K}$).

Soluzione:

Vedi pagina 28 del Sernesi. ■

Esercizio 3.10. *Sia n un intero positivo. Definiamo:*

(a) $\mathrm{O}(n) := \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid A^T A = I_n\}$;

(a$'$) $\mathrm{O}(p,q) := \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid A^T I_{p,q} A = I_{p,q}\}$, *ove* $p, q \in \{0, 1, \ldots, n\}$ *con* $p+q = n$ *e* $I_{p,q}$ *è la matrice diagonale avente i primi p elementi diagonali uguali a 1 e i restanti q uguali a -1;*

(b) $\mathrm{U}(n) := \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \mid A^H A = I_n\}$, *ove A^H è la* matrice trasposta coniugata di A (*anche detta* aggiunta hermitiana di A) *definita ponendo* $A^H := (\overline{a_{ji}})_{i,j}$ *se* $A = (a_{ij})_{i,j}$;

Dimostrare che:

(α) $\mathrm{O}(n)$ *è un sottogruppo di* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. *Tale sottogruppo si chiama* gruppo ortogonale di ordine n *e le matrici in esso contenute si dicono* matrici ortogonali di ordine n.[3]

(α') $\mathrm{O}(p,q)$ *è un sottogruppo di* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.[4]

(β) $\mathrm{U}(n)$ *è un sottogruppo di* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. *Tale sottogruppo si chiama* gruppo unitario di ordine n *e le matrici in esso contenute si dicono* matrici unitarie di ordine n.[5]

Soluzione:

Verifica diretta immediata mediante le formule $(AB)^T = B^T A^T$ e $(AB)^H = B^H A^H$. ■

Esercizio 3.11. *Con le notazioni dell'esercizio precedente, provare che* $\mathrm{O}(n)$ *e* $\mathrm{O}(p,q)$ *sono stabili per trasposizione, e* $\mathrm{U}(n)$ *è stabile per passaggio a trasposta coniugata, cioè*

(a) $A \in \mathrm{O}(n) \iff A^T \in \mathrm{O}(n)$;

(a$'$) $A \in \mathrm{O}(p,q) \iff A^T \in \mathrm{O}(p,q)$;

(b) $A \in \mathrm{U}(n) \iff A^H \in \mathrm{U}(n)$.

Soluzione:

Segue subito dall'Esercizio 3.3. ■

Esercizio 3.12 (Esercizio 7.30 di Ab-deF)**.** *Dimostrare che, date comunque due matrici* $A, B \in M_n(\mathbb{K})$, *vale:* $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$. *Dedurne che* $\mathrm{tr}(M^{-1}AM) = \mathrm{tr}(A)$ *per ogni* $A \in M_n(\mathbb{K})$ *e per ogni* $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

Soluzione:

Basta scriverlo usando la formula del prodotto riga per colonna. ■

Esercizio 3.13 (Esercizio 7.31 di Ab-deF)**.** *Si dimostri che non esistono matrici* $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ *tali che* $AB - BA = I_n$.

Soluzione:

$\mathrm{tr}(I_n) = n \neq 0 = \mathrm{tr}(AB) - \mathrm{tr}(BA) = \mathrm{tr}(AB - BA)$

■

[3]Il gruppo $\mathrm{O}(n)$ viene utilizzato in Meccanica classica.

[4]Il gruppo $\mathrm{O}(3,1)$ si chiama *gruppo di Lorentz*. Tale gruppo è di grande importanza in Relatività.

[5]Il gruppo $\mathrm{U}(n)$ viene utilizzato in Meccanica quantistica.