CORSI DI LAUREA IN MATEMATICA E FISICA

FOGLIO DI ESERCIZI # 2– GEOMETRIA 1

Esercizio 2.1 (Esercizio 1.1)**.** *Date le matrici*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

e dati $\lambda = 5$, $\mu = 2$, *calcolare* $A + B$, $B - A$, $\lambda A + \mu B$.

Soluzione:

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+3 & 2+0 \\ 3+(-1) & -1+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B - A = \begin{pmatrix} 3-1 & 0-2 \\ -1-3 & 4-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$5A + 2B = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 15 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -2 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 10 \\ 13 & 3 \end{pmatrix}$$

□

Esercizio 2.2. *Scrivere, se è possibile, la matrice*

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

come combinazione lineare di

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Soluzione:

Si tratta di determinare se esiste soluzione dell'equazione

$$Ax + By + Cz = D$$

Esplicitando tale equazione otteniamo:

$$Ax + By + Cz = \begin{pmatrix} x & x \\ x & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ y & y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2z \\ 0 & -z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & x+2z \\ x+y & y-z \end{pmatrix}$$

Quindi:

$$\begin{pmatrix} x & x+2z \\ x+y & y-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x + 2z = 1 \\ x + y = 1 \\ y - z = -1 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema per sotituzione, si vede facilmente che ha soluzione data da $\begin{cases} x = 3 \\ z = -1 \\ y = -2 \end{cases}$ quindi

$D = 3A - 2B - C$.

□

Esercizio 2.3. *Scrivere, se possibile, la matrice*

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

come combinazione lineare di

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soluzione:
La risoluzione è la stessa dell'esercizio precedente ed ` immediato verificare che $D = 3A + B - C$, cioè
$\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \\ z = -1 \end{cases}$ `la soluzione cercata.

□

Esercizio 2.4 (Esercizio 1.15)**.** *Date le matrici*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

stabilire se esistono valori di k per cui C è combinazione lineare di A, B. In caso positivo esprimere tale combinazione lineare.

Soluzione:
Analogamente all'esercizio precedente si tratta di determinare se esiste soluzione dell'equazione

$$Ax + By = C$$

Esplicitando tale equazione otteniamo:

$$Ax + By = \begin{pmatrix} x & kx \\ 0 & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2y & 3y \\ y & 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y & kx + 3y \\ y & x + 2y \end{pmatrix}$$

Quindi:

$$\begin{pmatrix} x + 2y & kx + 3y \\ y & x + 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = 3 \\ kx + 3y = 6 \\ y = 1 \\ x + 2y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2 = 3 \\ kx + 3 = 6 \\ y = 1 \\ x + 2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ kx = 3 \\ y = 1 \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ k = 3 \\ y = 1 \\ x = 1 \end{cases}$$

Quindi

- Se $k = 3$ il sistema ammette la sola soluzione $x = y = 1$ e $A + B = C$.
- Se $k \neq 3$ il sistema non ammette soluzione e C non è combinazione di A e B.

□

Esercizio 2.5 (Esercizio 1.5)**.** *Date le matrici*

$$A = \begin{pmatrix} -2 & \frac{1}{2} & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

calcolare $3A - 2B$ e AB^T.

Soluzione:

$$3A - 2B = \begin{pmatrix} -6 & \frac{3}{2} & 9 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -6 & \frac{4}{3} & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & \frac{15}{2} & \frac{23}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

$$AB^T = \begin{pmatrix} -2 & \frac{1}{2} & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ \frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Notiamo che la matrice $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ è detta matrice scalare.

□

Esercizio 2.6 (Esercizio 1.4)**.** *Date le matrici*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

calcolare i prodotti AI_4 e I_4A^T.

Soluzione:
Notiamo che la matrice quadrata I_4 è detta *matrice identica* di ordine 4. In generale le matrici identiche (dei differenti ordini) vengono indicate I.

$$AI_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = A$$

$$I_4A^T = I_4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = A^T$$

□

Esercizio 2.7 (Esercizio 1.2)**.** *Per ognuna delle seguenti coppie di matrici* A, B *e scalari* λ, $\mu \in \mathbf{R}$, *calcolare* $A + B$, $B - A$, $\lambda A + \mu B$, AB, BA, A^2*:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \qquad \lambda = \frac{1}{2},\ \mu = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -1 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda = 2,\ \mu = -1$$

Soluzione:
Comiciamo dalla prima coppia di matrici:

$$A + B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \qquad B - A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda A + \mu B = \frac{1}{2} \cdot A + 0 \cdot B = \frac{1}{2}A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad AB = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ 7 & 7 \end{pmatrix} \qquad A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$$

Analogamente per la seconda coppia di matrici:

$$A + B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B - A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -4 & 5 & 6 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda A + \mu B = 2A - B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 7 & -6 & -7 \\ 5 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad AB = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 11 & -4 & 1 \\ 7 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 1 \\ 21 & -4 & -10 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

□

Esercizio 2.8 (Esercizio 1.3)**.** *Date le seguenti matrici:*

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 & -3 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}; \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 5 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}; \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 5 & -1 \end{pmatrix};$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 10 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}; \qquad A_5 = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ -4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad A_6 = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -8 & 5 & 3 \end{pmatrix};$$

calcolare, quando possibile, i prodotti $A_i \cdot A_j$ *per* $i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Soluzione:
Ricordiamo che una matrice è detta $n \times m$ se ha n righe e m colonne. Inoltre è possibile moltiplicare due matrici A e B solamente se

- A è del tipo $n \times m$
- B è del tipo $m \times k$

(cioè se il numero delle colonne di A è uguale al numero delle righe di B). Il risultato è una matrice C del tipo $n \times k$.

Scriviamo solo i prodotti che è possibile effettuare:

$$A_1 \cdot A_3 = \begin{pmatrix} -2 & 32 \\ 26 & -4 \\ 10 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A_2 \cdot A_1 = \begin{pmatrix} 14 & 2 & 0 & -14 \\ -5 & 11 & 20 & -22 \end{pmatrix} \qquad A_2 \cdot A_4 = \begin{pmatrix} -8 & -20 \\ 11 & -10 \end{pmatrix} \qquad A_2 \cdot A_5 = \begin{pmatrix} 8 & -8 & 8 \\ 4 & 4 & -8 \end{pmatrix}$$

$$A_3 \cdot A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -10 & 25 \\ 8 & -4 & -1 \\ 20 & -23 & 30 \\ -4 & -7 & 23 \end{pmatrix} \qquad A_3 \cdot A_6 = \begin{pmatrix} -15 & 5 & -5 \\ -13 & 9 & 7 \\ -52 & 29 & 11 \\ -7 & 0 & -8 \end{pmatrix}$$

$$A_4 \cdot A_2 = \begin{pmatrix} 20 & -21 & 25 \\ 40 & -28 & 15 \\ 0 & 4 & -10 \end{pmatrix} \qquad A_4 \cdot A_6 = \begin{pmatrix} -49 & 28 & 12 \\ -77 & 49 & 31 \\ 6 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A_5 \cdot A_1 = \begin{pmatrix} 18 & -8 & -10 & 12 \\ 32 & -12 & -20 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_5 \cdot A_4 = \begin{pmatrix} -12 & 30 \\ -24 & 20 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_5 \cdot A_5 = \begin{pmatrix} -12 & 8 & 14 \\ -8 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_6 \cdot A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -7 & -15 & 13 \\ 35 & -21 & -40 & 28 \end{pmatrix} \qquad A_6 \cdot A_4 = \begin{pmatrix} -8 & -5 \\ -35 & 10 \end{pmatrix} \qquad A_6 \cdot A_5 = \begin{pmatrix} 2 & -8 & 1 \\ -4 & -12 & 12 \end{pmatrix}$$

□

Esercizio 2.9 (Esercizio 1,6)**.** *Calcolare la potenza A^3 della matrice*

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soluzione:

Si tratta di eseguire due prodotti:

$$A^3 = A \cdot A \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 3 \\ 1 & 9 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -15 & 5 \\ 5 & 26 & 15 \\ 5 & -5 & 6 \end{pmatrix}$$

□

Esercizio 2.10 (Esercizio 1.7)**.** *Data la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

calcolare, se esiste, l'inversa di A (cioè determinare se esiste la matrice B tale che $AB = BA = I$).

Soluzione:

Sia B la matrice cercata. Per potere effettuare i prodotti AB e BA, la matrice B deve essere 2×2. Sia quindi

$$B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$$

la generica matrice 2×2 e calcoliamo il prodotto AB:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+z & y+w \\ -3x+2z & -3y+2w \end{pmatrix}$$

Dalla condizione $AB = I$ segue

$$\begin{cases} x + z = 1 \\ y + w = 0 \\ -3x + 2z = 0 \\ -3y + 2w = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - z \\ y = -w \\ -3(1-z) + 2z = 0 \\ -3(-w) + 2w = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{5} \\ y = -\frac{1}{5} \\ z = \frac{3}{5} \\ w = \frac{1}{5} \end{cases}$$

Di conseguenza perché B verifichi la condizione $AB = I$deve essere

$$B = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

E' immediato verificare che tale matrice B soddisfa anche la condizione $BA = I$, di conseguenza B è la matrice inversa di A cercata.

Metodi più efficaci per calcolare l'inversa di una matrice verranno introdotti successsivamente.

□

Esercizio 2.11 (Esercizio 1.8)**.** *Date le seguenti matrici A, calcolare, se esiste, l'inversa di A (cioè determinare se esiste la matrice B tale che $AB = BA = I$).*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \qquad\qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Soluzione:

Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Per potere effettuare i prodotti AB e BA, la matrice B deve essere 2×2. Sia quindi

$$B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$$

la generica matrice 2×2. Si ha

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+z & y+w \\ 3x+3z & 3y+3w \end{pmatrix}$$

Dalla condizione $AB = I$ segue

$$\begin{cases} x+z=1 \\ y+w=0 \\ 3x+3z=0 \\ 3y+3w=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1-z \\ y=-w \\ 3(1-z)+3z=0 \\ 3(-w)+3w=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1-z \\ y=-w \\ 3=0 \\ 0=1 \end{cases}$$

La terza e la quarta equazione sono impossibili, di conseguenza tutto il sistema non ammette soluzione. Questo indica che la matrice A non ammette inversa.

Consideriamo ora la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

e sia

$$B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$$

la generica matrice 2×2. Si ha

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-z & y-w \\ -3x+2z & -3y+2w \end{pmatrix}$$

Dalla condizione $AB = I$ segue

$$\begin{cases} x-z=1 \\ y-w=0 \\ -3x+2z=0 \\ -3y+2w=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1+z \\ y=w \\ -3(1+z)+2z=0 \\ -3w+2w=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1+z \\ y=w \\ z=-3 \\ w=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \\ z=-3 \\ w=-1 \end{cases}$$

Di conseguenza deve essere

$$B = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$$

E' immediato verificare che tale matrice B soddisfa anche la condizione $BA = I$, di conseguenza B è la matrice inversa di A cercata. Una tale matrice B inversa di A viene normalmente indicata con A^{-1}.

□

Esercizio 2.12 (Esercizio 1.9)**.** *Date le matrici*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

calcolare AB, BA, BC e CB.

Soluzione:

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \qquad BA = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$
$$BC = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \qquad CB = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Notiamo che $AB \neq BA$, mentre $BC = CB$. Infatti il prodotto tra matrici non è in generale commutativo; nel secondo caso si presenta questa situazione particolare in quanto $C = 3I$.

□

Esercizio 2.13 (Esercizio 1.10)**.** *Si consideri il seguente insieme (matrici triangolari superiori di $M_{2\times 2}(\mathbf{R})$)*

$$I = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbf{R} \right\}$$

Si verifichi che I è chiuso rispetto al prodotto e alla somma di matrici, ovvero che presi due elementi di I anche il loro prodotto e la loro somma sono elementi di I.

Soluzione:
Siano

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix}$$

due generici elementi di I. Dobbiamo verificare che $A + B$ e AB sono ancora elementi di I:

$$A + B = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+x & b+y \\ 0 & c+z \end{pmatrix} \in I$$
$$AB = \begin{pmatrix} ax & ay+bz \\ 0 & cz \end{pmatrix} \in I$$

Notiamo che l'unica condizione per l'appartenenza a I è che l'elemento di posizione $2, 1$ si annulli.

□

Esercizio 2.14 (Esercizio 1.11)**.** *Mostrare attraverso un esempio che esistono matrici A, B non nulle tali che $AB = 0$.*

Soluzione:
Possiamo prendere per esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Infatti A e B sono non nulle e $AB = 0$.

□

Esercizio 2.15 (Esercizio 1.12)**.** *Sia*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e B una matrice tale che $AB = BA$. Si dimostri che

$$B = \lambda I_2 + \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dove $\lambda,\ x \in \mathbf{R}$.

Soluzione:

Sia

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

la generica matrice 2×2. Si ha

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} + b_{21} & b_{12} + b_{22} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$
$$BA = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{11} + b_{12} \\ b_{21} & b_{21} + b_{22} \end{pmatrix}$$

Dalla condizione $AB = BA$ segue

$$\begin{cases} b_{11} + b_{21} = b_{11} \\ b_{12} + b_{22} = b_{11} + b_{12} \\ b_{21} = b_{21} \\ b_{22} = b_{21} + b_{22} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_{21} = 0 \\ b_{22} = b_{11} \\ 0 = 0 \\ b_{21} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_{11} = t \\ b_{12} = s \\ b_{21} = 0 \\ b_{22} = t \end{cases} \quad \forall s, t \in \mathbf{R}$$

Di conseguenza B deve essere del tipo

$$B = \begin{pmatrix} t & s \\ 0 & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & s \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & s \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Abbiamo quindi ottenuto che

$$B = \lambda I_2 + \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dove $\lambda,\ x \in \mathbf{R}$.

$\square$

Esercizio 2.16 (Esercizio 1.18)**.** *Si risolva il sistema $Ax = b$ dove*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Soluzione:

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 3x_2 \\ 2x_1 + 4x_2 \end{pmatrix}$$

Quindi $Ax = b$ implica

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 2 \\ 2x_1 + 4x_2 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - 3x_2 \\ 4 - 6x_2 + 4x_2 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -7 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

La matrice A è detta **matrice dei coefficienti** e la matrice b **matrice o colonna dei termini noti** del sistema

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 2 \\ 2x_1 + 4x_2 = -2 \end{cases}$$

Si dice anche più semplicemente che A e b (oppure $A|b$) sono le **matrici associate al sistema**.

Notiamo che si può passare da A al sistema o viceversa semplicemente *aggiungendo* o *togliendo* le incognite.

$\square$

Esercizio 2.17. *Siano A e B matrici 3×3 tali che*

$$AB = BA \qquad\qquad \forall B \in M_{3\times 3}$$

Si dimostri che deve necessariamente essere:

$$A = \lambda I_3 \qquad\qquad \text{per qualche } \lambda \in \mathbf{R}$$

Soluzione:
Sia

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

la generica matrice 3×3. Poichè $AB = BA$ per ogni matrice B, in particolare deve valere per

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Di conseguenza:

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = BA \qquad \Rightarrow \; a_{21} = a_{31} = a_{12} = a_{13} = 0.$$

La nostra matrice A deve quindi essere del tipo

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Analogamente la relazione $AB = BA$ deve valere in particolare per

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Di conseguenza:

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = BA \qquad \Rightarrow \; a_{32} = a_{23} = 0.$$

La nostra matrice A deve quindi essere del tipo

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

Ripetiamo lo stesso ragionamento con

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ottenendo

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = BA \qquad \Rightarrow \; a_{11} = a_{22}.$$

La nostra matrice A deve quindi essere del tipo

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

Utilizzando infine

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

otteniamo

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & a_{11} & a_{11} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a_{11} & a_{33} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = BA \qquad \Rightarrow \; a_{11} = a_{33}.$$

La nostra matrice A deve quindi essere del tipo

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} & 0 \\ 0 & 0 & a_{11} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \lambda I_3 \qquad \text{per qualche } \lambda \in \mathbf{R}$$

$\square$