GEOMETRIA I

Università degli Studi di Trento
Corso di Laurea in Matematica e Fisica
A.A. 2012/2013

gennaio 2013 – Fac simile di un testo d'esame

Si svolgano i seguenti esercizi. Si terrà conto non solo della correttezza dei risultati, ma anche della completezza e chiarezza delle spiegazioni.

Esercizio 1. Per ogni $k \in \mathbb{R}$, si dica se il seguente sistema lineare $(\mathcal{S}_k)$ nelle incognite $(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$ è compatibile e, in caso affermativo, si calcolino tutte le soluzioni di $(\mathcal{S}_k)$:

$$(\mathcal{S}_k): \begin{cases} x + z + w = 3 \\ -x + ky + w = 0 \\ z + w = 2 \\ kx + y - z = 0 \\ x - y + z - w = 0 \end{cases} .$$

Esercizio 2. Siano U il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ e $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ definiti ponendo:

$$U := < u_1, u_2 > \quad \text{con } u_1 = (1, 0, 1)^T \text{ e } u_2 = (1, 1, 1)^T,$$

e

$$F((x, y, z)^T) := (4x - 4z, x - z, 2x - 4y)^T .$$

Si risponda ai seguenti quesiti:

(2a) Si calcoli una base di $U \cap \mathrm{Ker}(F)$ e la dimensione di $F(U)$.

(2b) Equipaggiamo $\mathbb{R}^3$ col prodotto scalare standard. Si calcoli un vettore $u_3 \in \mathbb{R}^3$ tale che $< u_3 >= U^\perp$.

(2c) Si scriva la matrice associata a F rispetto alla base $\mathcal{C} := (u_1, u_2, u_3)$ di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 3. Si dica per quali valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ la seguente matrice $A_k \in M_3(\mathbb{R})$ è diagonalizzabile (via similitudine):

$$A_k := \begin{pmatrix} k & 2k & 2k \\ 1 & 1-k & -k \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 4. Sia B la seguente matrice simmetrica in $M_4(\mathbb{R})$:

$$B := \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si calcoli:

(4a) il rango e la segnatura della forma quadratica su $\mathbb{R}^4$ associata a B;

(4b) una matrice $M \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ tale che $M^T B M$ è diagonale.

Esercizio 5. Sia n un intero positivo e sia $A \in M_{2n}(\mathbb{C})$ tale che $A^2 = \mathbf{0}$ e $\mathrm{rk}(A) = n$. Si dimostri che una matrice $B \in M_{2n}(\mathbb{C})$ è simile ad A se e soltanto se $B^2 = \mathbf{0}$ e $\mathrm{rk}(B) = n$.