GEOMETRIA I

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRENTO
CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA E FISICA
A.A. 2012/2013

gennaio 2013 – Fac simile di un testo d'esame

Si svolgano i seguenti esercizi. Si terrà conto non solo della correttezza dei risultati, ma anche della completezza e chiarezza delle spiegazioni.

Esercizio 1. Per ogni $k \in \mathbb{R}$, si dica se il seguente sistema lineare $\mathcal{S}_k$ nelle incognite $(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$ è compatibile e, in caso affermativo, si calcolino tutte le soluzioni di $\mathcal{S}_k$:

$$\mathcal{S}_k : \begin{cases} x + z + w = 3 \\ -x + ky + w = 0 \\ z + w = 2 \\ kx + y - z = 0 \\ x - y + z - w = 0 \end{cases}.$$

Esercizio 2. Siano U il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ e $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ definiti ponendo:

$$U :=< u_1, u_2 > \quad \text{con } u_1 = (1, 0, 1)^T \text{ e } u_2 = (1, 1, 1)^T,$$

e

$$F((x, y, z)^T) := (4x - 4z, x - z, 2x - 4y)^T.$$

Si risponda ai seguenti quesiti:

(2a) Si calcoli una base di $U \cap \mathrm{Ker}(F)$ e la dimensione di $F(U)$.

(2b) Equipaggiamo $\mathbb{R}^3$ col prodotto scalare standard. Si calcoli un vettore $u_3 \in \mathbb{R}^3$ tale che $< u_3 >= U^\perp$.

(2c) Si scriva la matrice associata a F rispetto alla base $\mathcal{C} := (u_1, u_2, u_3)$ di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 3. Si dica per quali valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ la seguente matrice $A_k \in M_3(\mathbb{R})$ è diagonalizzabile (via similitudine):

$$A_k := \begin{pmatrix} k & 2k & 2k \\ 1 & 1-k & -k \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 4. Sia B la seguente matrice simmetrica in $M_4(\mathbb{R})$:

$$B := \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si calcoli:

(4a) il rango e la segnatura della forma quadratica su $\mathbb{R}^4$ associata a B;

(4b) una matrice $M \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ tale che $M^T B M$ è diagonale.

Esercizio 5. Sia n un intero positivo e sia $A \in M_{2n}(\mathbb{C})$ tale che $A^2 = \mathbf{0}$ e $\mathrm{rk}(A) = n$. Si dimostri che una matrice $B \in M_{2n}(\mathbb{C})$ è simile ad A se e soltanto se $B^2 = \mathbf{0}$ e $\mathrm{rk}(B) = n$.

Esercizio 1. Applichiamo la procedura di eliminazione di Gauss–Jordan alla matrice orlata del sistema $\mathcal{S}_k$:

$$
\begin{array}{c}
\begin{matrix} x & y & z & w & \end{matrix} \\
\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & k & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ k & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)
\end{array}
\longmapsto
\begin{array}{c}
\begin{matrix} z & w & x & y & \end{matrix} \\
\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & k & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & k & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)
\end{array}
\longmapsto
\begin{array}{r} \\ \\ III-I \\ IV+I \\ V-I \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{matrix} z & w & x & y & \end{matrix} \\
\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & k & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & k+1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right)
\end{array}
\longmapsto
$$

$$
\longmapsto
\begin{array}{r} \\ \\ -III \\ IV-II \\ V+2II \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{matrix} z & w & x & y & \end{matrix} \\
\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & k+2 & 1-k & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -1+2k & -3 \end{array}\right)
\end{array}
\longmapsto
\begin{array}{r} \\ \\ \\ IV-(k+2)III \\ V+2III \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{matrix} z & w & x & y & \end{matrix} \\
\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-k & 1-k \\ 0 & 0 & 0 & -1+2k & -1 \end{array}\right)
\end{array}.
$$

Distinguiamo due casi: $k=1$ e $k \neq 1$.
Sia $k=1$. In questo caso la precedente matrice assume la seguente forma:

$$
\begin{array}{c}
\begin{matrix} z & w & x & y & \end{matrix} \\
\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)
\end{array}.
$$

In altre parole, si ha:

$$
\mathcal{S}_1 : \begin{cases} z+w+x=3 \\ w-x+y=0 \\ x=1 \\ y=-1 \end{cases}.
$$

Dunque $\mathcal{S}_1$ è compatibile e possiede la sola soluzione $(1,-1,0,2)^T$.

Consideriamo ora il caso $k \neq 1$. Proseguendo la procedura di Gauss–Jordan, otteniamo:

$$
\begin{array}{c}
\begin{matrix} z & w & x & y & \end{matrix} \\
\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-k & 1-k \\ 0 & 0 & 0 & -1+2k & -1 \end{array}\right)
\end{array}
\longmapsto
\begin{array}{r} \\ \\ \\ (1-k)^{-1}VI \\ V-(-1+2k)(1-k)^{-1}VI \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{matrix} z & w & x & y & \end{matrix} \\
\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2k \end{array}\right)
\end{array}.
$$

Dunque, se $k \neq 0$, allora $\mathcal{S}_k$ non è compatibile. Invece $\mathcal{S}_0$ è compatibile e possiede la sola soluzione $(1,1,1,1)^T$.

In conclusione, $\mathcal{S}_k$ è compatibile se e soltanto se $k \in \{0,1\}$. Inoltre, $\mathrm{Sol}(\mathcal{S}_0) = \{(1,1,1,1)^{\mathrm{T}}\}$ e $\mathrm{Sol}(\mathcal{S}_1) = \{(1,-1,0,2)^{\mathrm{T}}\}$.

Esercizio 2. (2a) Cominciamo osservando che u_1 e u_2 sono indipendenti (in quanto non proporzionali). Segue che $\dim_{\mathbb{R}}(U)=2$. Calcoliamo un'equazione cartesiana di U:

$$
(x,y,z)^T \in U \Longleftrightarrow \mathrm{rk}\begin{pmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \Longleftrightarrow \det\begin{pmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0 \Longleftrightarrow -x+z=0.
$$

Il sottospazio vettoriale $U \cap \operatorname{Ker}(F)$ di $\mathbb{R}^3$ è descritto dal seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} -x+z=0 \\ 4x-4z=0 \\ x-z=0 \\ 2x-4y=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x-z=0 \\ x-2y=0 \end{cases} \iff \begin{cases} z=2y \\ x=2y \end{cases}.$$

Segue che $((2,1,2)^T)$ è una base di $U \cap \operatorname{Ker}(F)$.

Poiché $F(u_1) = (0,0,2)^T$ e $F(u_2) = (0,0,-2)^T$, si ha che $F(U) =< (0,0,1)^T >$ e quindi $\dim_{\mathbb{R}}(F(U)) = 1$. Un altro modo di calcolare $\dim_{\mathbb{R}}(F(U))$ è il seguente. Consideriamo l'applicazione lineare $F' : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ottenuta restringendo F su U. Poiché $\operatorname{Ker}(F') = U \cap \operatorname{Ker}(F)$, $\dim_{\mathbb{R}}(U \cap \operatorname{Ker}(F)) = 1$ e $F'(U) = F(U)$, applicando il teorema di nullità più rango a F', si ha:

$$2 = \dim_{\mathbb{R}}(U) = \dim_{\mathbb{R}}(U \cap \operatorname{Ker}(F)) + \dim_{\mathbb{R}}(F(U)) = 1 + \dim_{\mathbb{R}}(F(U)) \Longrightarrow \dim_{\mathbb{R}}(F(U)) = 1.$$

(2b) Osserviamo che:

$$(x,y,z)^T \in U^{\perp} \iff \begin{cases} \langle (x,y,z)^T, u_1 \rangle_{\mathbb{R}^3} = 0 \\ \langle (x,y,z)^T, u_2 \rangle_{\mathbb{R}^3} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=-z \\ y=0 \end{cases}$$

Possiamo dunque porre $u_3 := (-1,0,1)^T$. Per calcolare u_3 si poteva procedere anche in altro modo. Osserviamo che l'equazione $-x+z=0$ di U si può scrivere come segue: $\langle (x,y,z)^T, (-1,0,1)^T \rangle_{\mathbb{R}^3} = 0$. Segue che $U^{\perp} =< (-1,0,1)^T >$.

(2c) Calcoliamo la prima colonna $[F(u_1)]_{\mathcal{C}} = (a_1,a_2,a_3)^T$ della matrice $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(F)$ associata a F nella base $\mathcal{C}$. Si ha che $a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3 = F(u_1) = (0,0,2)^T$, ovvero

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Procedendo in modo simile, otteniamo: $[F(u_2)]_{\mathcal{C}} = (-1.0,-1)^T$ e $[F(u_3)]_{\mathcal{C}} = (-3,-2,3)^T$. In conclusione abbiamo:

$$\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(F) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3. Sia $k \in \mathbb{R}$. Calcoliamo il polinomio caratteristico $P_{A_k}(T)$ sviluppando il determinante rispetto alla prima riga:

$$P_{A_k}(T) = \det \begin{pmatrix} k-T & 2k & 2k \\ 1 & 1-k-T & -k \\ -1 & -1 & -T \end{pmatrix} = (k-T)(-T+kT+T^2-k) - 2k(-T-k) + 2k(-1+1-k-T) =$$
$$= (k-T)(k+T)(-1+T).$$

Se $k \in \mathbb{R} \setminus \{-1,0,1\}$, allora A_k possiede tre autovalori distinti e quindi è diagonalizzabile.

Vediamo gli altri tre casi.

Sia $k=-1$. In questo caso, si ha: $\sigma(A_{-1}) = \{\lambda_1, \lambda_2\}$ con $\lambda_1 = 1$, $\operatorname{ma}(\lambda_1, A_{-1}) = 2$ e $\lambda_2 = -1$, $\operatorname{ma}(\lambda_2, A_{-1}) = 1$. Poiché $1 \leq \operatorname{mg}(\lambda_2, A_{-1}) \leq \operatorname{ma}(\lambda_2, A_{-1}) = 1$, vale: $\operatorname{mg}(\lambda_2, A_{-1}) = \operatorname{ma}(\lambda_2, A_{-1})$. Calcoliamo $\operatorname{mg}(\lambda_1, A_{-1})$:

$$\operatorname{mg}(\lambda_1, A_{-1}) = 3 - \operatorname{rk}(A_{-1} - \lambda_1 I_3) = 3 - \operatorname{rk} \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = 2 = \operatorname{ma}(\lambda_1, A_{-1}).$$

Segue che A_{-1} è diagonalizzabile.

Sia $k=1$. Vale: $\sigma(A_1) = \{\lambda_1, \lambda_2\}$ con $\lambda_1 = 1$, $\operatorname{ma}(\lambda_1, A_1) = 2$ e $\lambda_2 = -1$, $\operatorname{ma}(\lambda_2, A_1) = 1 = \operatorname{mg}(\lambda_2, A_1)$. Calcoliamo $\operatorname{mg}(\lambda_1, A_1)$:

$$\operatorname{mg}(\lambda_1, A_1) = 3 - \operatorname{rk}(A_1 - \lambda_1 I_3) = 3 - \operatorname{rk} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = 1 < \operatorname{ma}(\lambda_1, A_1).$$

Segue che A_1 non è diagonalizzabile.

Sia $k = 0$. Vale: $\sigma(A_0) = \{\lambda_1, \lambda_3\}$ con $\lambda_1 = 1$, $\mathrm{ma}(\lambda_1, A_0) = 1 = \mathrm{mg}(\lambda_1, A_0)$ e $\lambda_3 = 0$, $\mathrm{ma}(\lambda_3, A_0) = 2$. Calcoliamo $\mathrm{mg}(\lambda_3, A_0)$:

$$\mathrm{mg}(\lambda_3, A_0) = 3 - \mathrm{rk}(A_0 - \lambda_3 I_3) = 3 - \mathrm{rk}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 2 = \mathrm{ma}(\lambda_3, A_0).$$

Segue che A_0 è diagonalizzabile.

In conclusione, A_k è diagonalizzabile se e soltanto se $k \neq 1$.

Si veda il "Foglio di esercizi 12" sulla pagina web `http://science.unitn.it/~carrara/MICHELA/` per ulteriori esercizi di questo tipo.

Esercizio 4. (4a) Il polinomio caratteristico P_B di B è uguale a $T^4 - T^3 - 4T^2 + 2T$. Per il criterio di Cartesio, si ha che P_B ha una sola soluzione nulla, due soluzioni positive e $4 - 1 - 2 = 1$ soluzione negativa. Dunque la segnatura della forma quadratica q_B associata a B è $(2, 1)$. In particolare, si ha: $\mathrm{rk}(q_B) = 3$.

(4b) Completiamo i quadrati di q_B prima rispetto a x_4 e poi rispetto a x_1:

$$\begin{aligned} q_B(x_1, x_2, x_3, x_4) &= -2x_1x_3 + \mathbf{2x_1x_4} + 2x_2x_3 \mathbf{- 2x_2x_4 + x_4^2} = \\ &= \mathbf{(\underline{x_4} + x_1 - x_2)^2 - x_1^2 - x_2^2 + 2x_1x_2} - 2x_1x_3 + 2x_2x_3 = \\ &= (\underline{x_4} + x_1 - x_2)^2 \mathbf{- x_1^2} - x_2^2 \mathbf{+ 2x_1x_2 - 2x_1x_3} + 2x_2x_3 = \\ &= (\underline{x_4} + x_1 - x_2)^2 \mathbf{- (\underline{x_1} - x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_2x_3} - x_2^2 + 2x_2x_3 = \\ &= (\underline{x_4} + x_1 - x_2)^2 - (\underline{x_1} - x_2 + x_3)^2 + \underline{x_3}^2. \end{aligned}$$

Eseguiamo il seguente cambiamento di variabili:

$$\begin{cases} y_1 = \underline{x_4} + x_1 - x_2 = x_1 - x_2 + x_4 \\ y_2 = \underline{x_3} \\ y_3 = \underline{x_1} - x_2 + x_3 \\ y_4 = \underline{x_2} \end{cases}.$$

o, equivalentemente, $y = Nx$ se $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)^T$, $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ e

$$N = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R}).$$

Vale:

$$x^T B x = q_B(x) = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 = y^T D y = (Nx)^T D (Nx) = x^T N^T D N x$$

per ogni $x \in \mathbb{R}^4$, dove

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Segue che $B = N^T D N$ o, equivalentemente, $(N^{-1})^T B (N^{-1}) = D$. La matrice

$$M := N^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

ha la proprietà desiderata.

Si veda il "Foglio di esercizi 12" sulla pagina web `http://science.unitn.it/~carrara/MICHELA/` per ulteriori esercizi di questo tipo.

Esercizio 5. Supponiamo che B sia simile ad A, ovvero $B = M^{-1}AM$ per qualche $M \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{C})$. Poiché M è invertibile, $\mathrm{rk}(B) = \mathrm{rk}(A) = n$. Dobbiamo provare che $B^2 = \mathbf{0}$. Grazie all'associatività del prodotto matriciale, si ha:

$$B^2 = M^{-1}AMM^{-1}AM = M^{-1}AI_{2n}AM = M^{-1}A^2M = M^{-1}\mathbf{0}M = \mathbf{0}.$$

Viceversa supponiamo che B sia una matrice in $M_{2n}(\mathbb{C})$ tale che $B^2 = \mathbf{0}$ e $\mathrm{rk}(B) = n$. Proviamo che A e B hanno la stessa forma canonica di Jordan e quindi sono simili.

Calcoliamo la forma canonica di Jordan J_A di A. Anzitutto osserviamo che A possiede il solo autovalore nullo. Infatti, se $\lambda \in \sigma(A)$ e $v \in \mathbb{C}^{2n}$ è un autovettore di A relativo a λ, allora

$$0 = A^2v = A(Av) = A(\lambda v) = \lambda Av = \lambda^2 v.$$

D'altra parte $v \neq 0$ e quindi $\lambda^2 = 0$, ovvero $\lambda = 0$. Dunque $\sigma(A) = \{0\}$. Si osservi inoltre che $\mathrm{mg}(0, A) = 2n - \mathrm{rk}(A) = n$. Dal teorema di Jordan[1] segue che J_A è formata da blocchi di Jordan $J_{m_1}(0), \ldots, J_{m_n}(0)$ relativi a 0 di certi ordini $m_1, \ldots, m_n$, cioè ha la seguente forma:

$$J_A = \begin{pmatrix} J_{m_1}(0) & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & J_{m_2}(0) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & J_{m_n}(0) \end{pmatrix}.$$

Sia $N \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{C})$ tale che $J_A = N^{-1}AN$. Poiché

$$\begin{pmatrix} J_{m_1}(0)^2 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & J_{m_2}(0)^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & J_{m_n}(0)^2 \end{pmatrix} = J_A^2 = N^{-1}A^2N = N^{-1}\mathbf{0}N = \mathbf{0},$$

si ha che $J_{m_j}(0)^2$ è la matrice nulla in $M_{m_j}(\mathbb{C})$ per ogni $j \in \{1, \ldots, n\}$ o, equivalentemente, $m_j \leq 2$ per ogni $j \in \{1, \ldots, n\}$. Poiché $m_1 + \ldots + m_n = 2n$, segue che $m_j = 2$ per ogni $j \in \{1, \ldots, n\}$ e quindi si ha:

$$J_A = \begin{pmatrix} J_2(0) & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & J_2(0) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & J_2(0) \end{pmatrix}.$$

Ripetendo gli stessi ragionamenti con B al posto di A, otteniamo che la forma canonica di Jordan di B coincide con J_A.

[1] Si veda il "Foglio di esercizi 12" sulla pagina web `http://science.unitn.it/~carrara/MICHELA/`.