GEOMETRIA I

Università degli Studi di Trento
Corso di Laurea in Matematica e Fisica
A.A. 2012/2013

25 giugno 2013

Si svolgano i seguenti esercizi. Si terrà conto non solo della correttezza dei risultati, ma anche della completezza e chiarezza delle spiegazioni.

Esercizio 1. Per ogni $k \in \mathbb{R}$, si dica se il seguente sistema lineare $\mathcal{S}_k$ nelle incognite $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5$ è compatibile e, in caso affermativo, si calcolino tutte le soluzioni di $\mathcal{S}_k$:

$$\mathcal{S}_k : \begin{cases} x_3 + x_5 = 0 \\ x_1 + (k-1)x_2 + x_4 = k - 1 \\ kx_1 - x_3 + kx_4 - x_5 = k^2 - k \\ x_1 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases} .$$

Esercizio 2. Sia $F : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita ponendo

$$F((x, y, z, w)^T) := (x - z, 0, y - z, x + w)^T$$

per ogni $(x, y, z, w)^T \in \mathbb{R}^4$, sia (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonica di $\mathbb{R}^4$ e siano v_1, v_2, v_3, v_4 i vettori di $\mathbb{R}^4$ definiti ponendo $v_1 := e_1 + e_4$, $v_2 := e_2 + e_3$, $v_3 := e_3$ e $v_4 := e_1$.

Si risponda ai seguenti quesiti.

(2a) Si dimostri che $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ è una base di $\mathbb{R}^4$ e si calcoli la matrice $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(F)$ associata a F rispetto a $\mathcal{B}$.

(2b) Si dimostri che $\mathrm{Ker}(F) \oplus \mathrm{Im}(F) = \mathbb{R}^4$.

Esercizio 3. Si calcoli la forma canonica di Jordan della seguente matrice $A \in M_6(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 4. Sia $q : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ la forma quadratica su $\mathbb{R}^4$ definita ponendo

$$q(x, y, z, w) := x^2 + y^2 + z^2 + w^2 + 2xy - 2xw - 2yw.$$

Si risponda ai seguenti quesiti.

(4a) Si calcoli la segnatura di q.

(4b) Si calcolino delle equazioni cartesiane di un sottospazio vettoriale W di $\mathbb{R}^4$ tale che $\dim_{\mathbb{R}}(W) = 2$ e $q(x, y, z, w) = 0$ per ogni $(x, y, z, w)^T \in W$.

(4c) Si dimostri che non esiste alcun sottospazio vettoriale V di $\mathbb{R}^4$ tale che $\dim_{\mathbb{R}}(V) = 3$ e $q(x, y, z, w) = 0$ per ogni $(x, y, z, w)^T \in V$.

Esercizio 5. Sia n un intero positivo e sia $A \in M_n(\mathbb{R})$ una matrice simmetrica. Si dimostri che la matrice A è definita positiva se e soltanto se esiste una matrice $B \in M_n(\mathbb{R})$ simmetrica e definita positiva tale che $B^2 = A$.