GEOMETRIA I

Università degli Studi di Trento
Corso di Laurea in Matematica e Fisica
A.A. 2012/2013
15 gennaio 2013

Si svolgano i seguenti esercizi. Si terrà conto non solo della correttezza dei risultati, ma anche della completezza e chiarezza delle spiegazioni.

Esercizio 1. Per ogni $k \in \mathbb{R}$, si dica se il seguente sistema lineare $\mathcal{S}_k$ nelle incognite $(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$ è compatibile e, in caso affermativo, si calcolino tutte le soluzioni di $\mathcal{S}_k$:

$$\mathcal{S}_k : \begin{cases} x + y + w = 1 \\ x + ky + w = 0 \\ x - kz + w = 0 \\ y + kw = 1 \end{cases} .$$

Esercizio 2. Siano U e V i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$ definiti ponendo

$$U := \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = 0\}$$

e

$$V :=< v_1, v_2 >, \text{ dove } v_1 = (1, 0, -1)^T \text{ e } v_2 = (2, 1, 0)^T.$$

Si risponda ai seguente quesiti:

(2a) Si calcoli una base dell'intersezione $U \cap V$.

(2b) Sia $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ tale che $F(U) = U$ e $\dim_{\mathbb{R}}(F(V)) = 1$. Si dimostri che $F(V) = F(U \cap V)$ e $F(\mathbb{R}^3) = U$.

Esercizio 3. Si calcoli la forma canonica di Jordan della seguente matrice $A \in M_5(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 4. Per ogni $k \in \mathbb{R}$, definiamo la forma quadratica $q_k : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ ponendo

$$q_k(x_1, x_2, x_3) := kx_1^2 + x_2^2 + kx_3^2 - 2x_1x_2.$$

Si calcoli la segnatura di q_k al variare di $k \in \mathbb{R}$ e sia dica per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la forma quadratica q_k è definita negativa.

Esercizio 5. Si risponda ai seguenti quesiti:

(5a) Sia A una matrice in $M_3(\mathbb{C})$ che soddisfa le seguenti tre proprietà:

$$\det(A) = 0, \ \operatorname{tr}(A) = 3 \ \text{ e } \ A^4 - 3A^3 + 2A^2 = \mathbf{0}.$$

Si dimostri che gli autovalori di A appartengono all'insieme $\{0, 1, 2\}$ e che A è diagonalizzabile (via similitudine).

(5b) Si dimostri, fornendo un esempio esplicito, che esiste una matrice $B \in M_3(\mathbb{C})$ con le seguenti proprietà: $\det(B) = 0$, $\operatorname{tr}(B) \neq 3$, $B^4 - 3B^3 + 2B^2 = \mathbf{0}$ e B non è diagonalizzabile (via similitudine).

Soluzioni

Esercizio 1. Applichiamo la procedura di eliminazione di Gauss–Jordan alla matrice orlata del sistema $\mathcal{S}_k$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & k & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -k & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & k & 1 \end{array}\right) \longmapsto \begin{array}{r} \\ II-I \\ III-I \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & k-1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -k & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & k & 1 \end{array}\right) \longmapsto \begin{array}{r} \\ -III \\ IV \\ II \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & k & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & k & 1 \\ 0 & k-1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \longmapsto$$

$$\longmapsto \begin{array}{r} \\ \\ III-II \\ IV-(k-1)II \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & k & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -k & k & 0 \\ 0 & 0 & (1-k)k & 0 & -k \end{array}\right).$$

Distinguiamo due casi: $k = 0$ e $k \neq 0$.

Sia $k = 0$. In questo caso la precedente matrice assume la seguente forma:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

In altre parole, si ha:

$$\mathcal{S}_0 : \left\{ \begin{array}{l} x + y + w = 1 \\ y = 1 \end{array} \right. .$$

Dunque $\mathcal{S}_0$ è compatibile e vale:

$$\mathrm{Sol}(\mathcal{S}_0) = \left\{ \begin{pmatrix} -s \\ 1 \\ t \\ s \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, t, s \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, t, s \in \mathbb{R} \right\}.$$

Consideriamo ora il caso $k \neq 0$. Proseguendo la procedura di Gauss–Jordan, otteniamo:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & k & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -k & k & 0 \\ 0 & 0 & (1-k)k & 0 & -k \end{array}\right) \longmapsto \begin{array}{r} \\ \\ (-k)^{-1}III \\ k^{-1}VI \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & k & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-k & 0 & -1 \end{array}\right) \longmapsto$$

$$\longmapsto \begin{array}{r} \\ \\ \\ VI-(1-k)III \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & k & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-k & -1 \end{array}\right).$$

Dunque, se $k = 1$, allora $\mathcal{S}_k$ non è compatibile. Se invece $k \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, allora $\mathcal{S}_k$ è compatibile e possiede la sola soluzione $\left(1, \frac{1}{1-k}, \frac{1}{k-1}, \frac{1}{k-1}\right)^T$.

In conclusione, $\mathcal{S}_k$ è compatibile se e soltanto se $k \neq 1$. Inoltre vale:

$$\mathrm{Sol}(\mathcal{S}_k) = \left\{ \begin{array}{ll} \{(-s, 1, t, s)^T \in \mathbb{R}^4 \,|\, t, s \in \mathbb{R}\} & \text{se } k = 0 \\ \left\{\left(1, \frac{1}{1-k}, \frac{1}{k-1}, \frac{1}{k-1}\right)^T\right\} & \text{se } k \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \end{array} \right. .$$

Esercizio 2. (2a) Calcoliamo equazioni cartesiane per V. Poiché v_1 e v_2 sono linearmente indipendente, si ha:

$$(x, y, z)^T \in V \Longleftrightarrow \mathrm{rk} \begin{pmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2 \Longleftrightarrow 0 = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = x - 2y + z.$$

Dunque $x - 2y + z = 0$ è una equazione cartesiana di V e quindi $U \cap V$ è uguale all'insieme delle soluzioni del seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}.$$

Risolvendo tale sistema otteniamo che $((0,1,2)^T)$ è una base di $U \cap V$. In particolare, si ha che $\dim_{\mathbb{R}}(U \cap V) = 1$.

(2b) Sia $w := (0,1,2)^T$. Completiamo la base (w) di $U \cap V$ ad una base di U e ad una base di V: siano $u \in U$ e $v \in V$ tali che (w,u) è una base di U e (w,v) è una base di V. Si osservi che $v \notin U$; altrimenti $V \subset U$ e quindi $U \cap V = V$ avrebbe dimensione 2. Segue che i vettori w, u e v sono linearmente indipendenti, e quindi (w,u,v) è una base di $\mathbb{R}^3$. In particolare, vale: $< F(w), F(u), F(v) >= F(\mathbb{R}^3)$.

Osserviamo che $F(w) \neq 0$. Altrimenti $U = F(U) =< F(w), F(u) >=< F(u) >$ e quindi U avrebbe dimensione ≤ 1, che è assurdo essendo $\dim_{\mathbb{R}}(U) = 2$. Segue che il sottospazio vettoriale $F(U \cap V)$ di $\mathbb{R}^3$ ha dimensione 1 e $(F(w))$ è una sua base. Poiché $F(U \cap V) \subset F(V)$ e per ipotesi $\dim_{\mathbb{R}}(F(V)) = 1$, si deduce che $F(U \cap V) = F(V)$ e $(F(w))$ è una base di $F(V)$. In particolare, vale:

$$F(v) \in F(V) = F(U \cap V) \subset F(U).$$

Segue che

$$U = F(U) \subset F(\mathbb{R}^3) =< F(w), F(u), F(v) >\subset F(U) = U,$$

da cui l'uguaglianza cercata $F(\mathbb{R}^3) = U$.

Esercizio 3. Cominciamo col calcolare il polinomio caratteristico di A. Sviluppando il corrispondente determinante rispetto alla prima riga e all'ultima colonna successivamente, otteniamo:

$$P_A(T) = \begin{vmatrix} 1-T & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -T & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1-T & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -T & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -T \end{vmatrix} = (1-T) \begin{vmatrix} -T & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1-T & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -T & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -T \end{vmatrix} =$$

$$= (1-T)(-T) \begin{vmatrix} -T & -1 & -1 \\ 0 & 1-T & 1 \\ 0 & 0 & -T \end{vmatrix} \text{ e quindi } P_A(T) = -T^3(T-1)^2.$$

Segue che $\sigma(A) = \{\lambda_0, \lambda_1\}$ con $\lambda_0 = 0$, $\mathrm{ma}(\lambda_0, A) = 3$, $\lambda_1 = 1$ e $\mathrm{ma}(\lambda_1, A) = 2$.

Calcoliamo ora $\mathrm{mg}(\lambda_0, A)$. Osserviamo che:

$$\mathrm{rk}(A - \lambda_0 I_5) = \mathrm{rk} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{(1)}{=} \mathrm{rk} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{(2)}{=} 3,$$

dove:

(1) Abbiamo cancellato l'ultima colonna, la quarta riga (che sono nulle) e la seconda riga (che è uguale alla terza) di $A = A - \lambda_0 I_5$. La matrice

$$A' := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

così ottenuta ha lo stesso rango di A.

(2) Si ha che $\mathrm{rk}(A') = 3$, perché il minore principale di testa di A' di ordine 3 è uguale a $-1 \neq 0$.

Segue che $\mathrm{mg}(\lambda_0, A) = 5 - 3 = 2$. Poiché $\mathrm{ma}(\lambda_0, A) = 3$, nella forma canonica di Jordan J_A di A sono presenti due blocchi di Jordan $J_2(0)$ e $J_1(0)$ relativi all'autovalore λ_0, uno di ordine 2 e l'altro di ordine 1.

Vediamo ora quanto vale $\mathrm{mg}(\lambda_1, A)$. Osserviamo che:

$$\mathrm{rk}(A-\lambda_1 I_5) = \mathrm{rk}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \overset{(3)}{=} \mathrm{rk}\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \overset{(4)}{=} 4,$$

dove:

(3) Abbiamo cancellato la prima riga (che è nulla) e la terza colonna (che è uguale alla seconda) di $A-\lambda_1 I_5$. La matrice

$$A'' := \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

così ottenuta ha lo stesso rango di $A-\lambda_1 I_5$.

(4) Si ha che $\mathrm{rk}(A'')=4$, perché $\det(A'')=1\neq 0$.

Segue che $\mathrm{mg}(\lambda_1, A) = 5-4 = 1$. Poiché $\mathrm{ma}(\lambda_1, A)=2$, in J_A è presente un solo blocco di Jordan $J_2(1)$ relativo all'autovalore λ_1 di ordine 2.

Dunque la forma canonica di Jordan J_A di A ha la seguente forma:

$$J_A = \left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

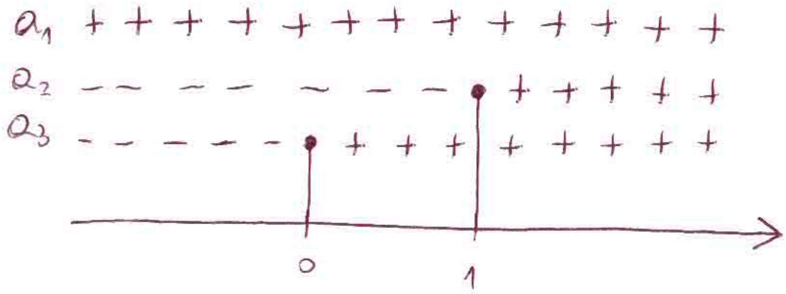
Esercizio 4. Sia $k\in\mathbb{R}$. Completiamo i quadrati di q_k rispetto a x_2:

$q_k(x_1,x_2,x_3) = kx_1^2+\boldsymbol{x_2^2}+kx_3^2-\boldsymbol{2x_1x_2} = \boldsymbol{(\underline{x_2}-x_1)^2} - \boldsymbol{x_1^2}+kx_1^2+kx_3^2 = (\underline{x_2}-x_1)^2+(k-1)\underline{x_1}^2+k\underline{x_3}^2$.

Eseguendo il cambiamento di variabili

$$\begin{cases} y_1 = x_2 - x_1 \\ y_2 = x_1 \\ y_3 = x_3 \end{cases},$$

possiamo scrivere $q_k(x_1,x_2,x_3) = a_1y_1^2 + a_2y_2^2 + a_3y_3$, dove $a_1 = 1$, $a_2 = k-1$ e $a_3 = k$. Studiamo il segno di a_1, a_2 e a_3:



Denotando con $\mathrm{sgn}(q_k)$ la segnatura di q_k, si ha:

$$\mathrm{sgn}(q_k) = \begin{cases} (1,2) & \text{se } k<0 \\ (1,1) & \text{se } k=0 \\ (2,1) & \text{se } k\in(0,1) \\ (2,0) & \text{se } k=1 \\ (3,0) & \text{se } k>1 \end{cases}.$$

Poiché q_k non ha mai segnatura $(0,3)$, possiamo concludere che q_k non è definita negativa per ogni $k\in\mathbb{R}$.

Esercizio 5. (5a) Poiché $\mathbb{C}$ è algebricamente chiuso, A ha tutti gli autovalori in $\mathbb{C}$. Sia $\lambda \in \mathbb{C}$ un tale autovalore e sia $v \in \mathbb{C}^3$ un autovettore di A relativo a λ. Vale:

$$0 = (A^4 - 3A^3 + 2A^2)v = A^4v - 3A^3v + 2A^2v = \lambda^4 v - 3\lambda^3 v + 2\lambda^2 v = (\lambda^4 - 3\lambda^3 + 2\lambda^2)v.$$

Essendo $v \neq 0$, si ha che $0 = \lambda^4 - 3\lambda^3 + 2\lambda^2 = \lambda^2(\lambda - 1)(\lambda - 2)$, ovvero $\lambda \in \{0, 1, 2\}$.
Dunque se $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sono i tre autovalori (eventualmente ripetuti) di A, allora valgono:

(i) $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \{0, 1, 2\}$,
(ii) $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \det(A) = 0$,
(iii) $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \mathrm{tr}(A) = 3$.

Da (ii) segue che almeno un autovalore λ_i è nullo. A meno di riordinare gli indici, possiamo supporre che $\lambda_1 = 0$. Grazie a (iii) sappiamo che $\lambda_2 + \lambda_3 = 3$. Combinando questa uguaglianza con (i) si deduce che $(\lambda_2, \lambda_3) = (1, 2)$ oppure $(\lambda_2, \lambda_3) = (2, 1)$. In ogni caso, a meno di riordionare di indici, possiamo supporre che $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ e $\lambda_3 = 2$.
Segue che gli autovalori di A sono distinti e quindi A è diagonalizzabile.

(5b) Consideriamo la seguente matrice $B \in M_3(\mathbb{C})$ in forma canonica di Jordan:

$$B := \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Evidentemente B non è diagonalizzabile e valgono: $\det(B) = 0$, $\mathrm{tr}(B) = 0 \neq 3$, $B^2 = \mathbf{0}$ e quindi $B^4 - 3B^3 + 2B^2 = B^2(B^2 - 3B + 2I_3) = \mathbf{0}(B^2 - 3B + 2I_3) = \mathbf{0}$.