# GEOMETRIA I

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRENTO
CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA E FISICA
A.A. 2012/2013
11 giugno 2013

Si svolgano i seguenti esercizi. Si terrà conto non solo della correttezza dei risultati, ma anche della completezza e chiarezza delle spiegazioni.

**Esercizio 1.** Dopo aver dimostrato che il seguente sistema lineare $\mathcal{S}$ nelle incognite $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$\mathcal{S} : \begin{cases} x - z = 2 \\ 3x - 2y = 3 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

ammette un'unica soluzione, si calcoli tale soluzione sia con il metodo di Cramer che con il metodo dell'inversa.

**Esercizio 2.** Per ogni $k \in \mathbb{R}$, sia $T_k : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita ponendo

$$T_k((x_1, x_2, x_3)^T) := (x_1 - x_2 + kx_3, kx_1 - x_2 + x_3, x_2 + 3x_3, kx_1 + 4x_3)^T$$

per ogni $(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$. Si risponda ai seguenti quesiti:

(2a) Si dica per quali valori del parametro $k \in \mathbb{R}$, $T_k$ è iniettiva.

(2b) Indichiamo con $(y_1, y_2, y_3, y_4)$ le coordinate di $\mathbb{R}^4$ ed equipaggiamo $\mathbb{R}^4$ con il prodotto scalare standard $\langle u, v\rangle_{\mathbb{R}^4} = u^T v$. Sia $W$ il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ definito dal seguente sistema di equazioni cartesiane:

$$\begin{cases} y_3 + y_4 = 0 \\ y_1 + y_2 - y_3 = 0 \end{cases}.$$

Si calcoli una base di $W$ e si dica per quali valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ vale l'uguaglianza $\mathrm{Im}(T_k) = W^\perp$.

**Esercizio 3.** Per ogni valore del parametro $t \in \mathbb{R}$, si dica se la seguente matrice $A_t \in M_3(\mathbb{R})$ è diagonalizzabile (via similitudine) e, in caso affermativo, si calcoli una base diagonalizzante per $A_t$

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1-t \\ t & t & 0 \\ t & t & -t \end{pmatrix}.$$

**Esercizio 4.** Sia $q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ la forma quadratica su $\mathbb{R}^3$ definita ponendo

$$q(x, y, z) := -5x^2 + 3y^2 + z^2 + 2xy - 4yz.$$

Si risponda ai seguenti quesiti.

(4a) Si calcoli il rango e la segnatura di $q$.

(4b) Sia $A \in M_3(\mathbb{R})$ la matrice associata a $q$ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$. Si calcoli una matrice diagonale $D \in M_3(\mathbb{R})$ ed una matrice $M \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ tali che $A = M^T DM$.

**Esercizio 5.** Sia $M_2(\mathbb{R})$ l'insieme delle matrici quadrate $2 \times 2$ a coefficienti reali. Data una funzione $f : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$, diciamo che $f$ è invariante per similitudine se soddisfa la seguente condizione: *se due matrici $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ sono simili, allora $f(A) = f(B)$.*

Definiamo le funzioni $F : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ e $G : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ ponendo

$$F\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) := abcd \qquad \text{e} \qquad G\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) := a^2 + d^2 + 2bc$$

per ogni $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Si risponda ai seguenti quesiti, motivando la risposta con una dimostrazione o con un controesempio esplicito:

(5a) È vero che $F$ è invariante per similitudine?

(5b) È vero che $G$ è invariante per similitudine?