GEOMETRIA I

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRENTO
CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA E FISICA
A.A. 2012/2013
11 giugno 2013

Si svolgano i seguenti esercizi. Si terrà conto non solo della correttezza dei risultati, ma anche della completezza e chiarezza delle spiegazioni.

Esercizio 1. Dopo aver dimostrato che il seguente sistema lineare $\mathcal{S}$ nelle incognite $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$\mathcal{S} : \begin{cases} x - z = 2 \\ 3x - 2y = 3 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

ammette un'unica soluzione, si calcoli tale soluzione sia con il metodo di Cramer che con il metodo dell'inversa.

Esercizio 2. Per ogni $k \in \mathbb{R}$, sia $T_k : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita ponendo

$$T_k((x_1, x_2, x_3)^T) := (x_1 - x_2 + kx_3, kx_1 - x_2 + x_3, x_2 + 3x_3, kx_1 + 4x_3)^T$$

per ogni $(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$. Si risponda ai seguenti quesiti:

(2a) Si dica per quali valori del parametro $k \in \mathbb{R}$, T_k è iniettiva.

(2b) Indichiamo con (y_1, y_2, y_3, y_4) le coordinate di $\mathbb{R}^4$ ed equipaggiamo $\mathbb{R}^4$ con il prodotto scalare standard $\langle u, v\rangle_{\mathbb{R}^4} = u^T v$. Sia W il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ definito dal seguente sistema di equazioni cartesiane:

$$\begin{cases} y_3 + y_4 = 0 \\ y_1 + y_2 - y_3 = 0 \end{cases}.$$

Si calcoli una base di W e si dica per quali valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ vale l'uguaglianza $\mathrm{Im}(T_k) = W^\perp$.

Esercizio 3. Per ogni valore del parametro $t \in \mathbb{R}$, si dica se la seguente matrice $A_t \in M_3(\mathbb{R})$ è diagonalizzabile (via similitudine) e, in caso affermativo, si calcoli una base diagonalizzante per A_t:

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1-t \\ t & t & 0 \\ t & t & -t \end{pmatrix}.$$

Esercizio 4. Sia $q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ la forma quadratica su $\mathbb{R}^3$ definita ponendo

$$q(x, y, z) := -5x^2 + 3y^2 + z^2 + 2xy - 4yz.$$

Si risponda ai seguenti quesiti.

(4a) Si calcoli il rango e la segnatura di q.

(4b) Sia $A \in M_3(\mathbb{R})$ la matrice associata a q rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$. Si calcoli una matrice diagonale $D \in M_3(\mathbb{R})$ ed una matrice $M \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ tali che $A = M^T D M$.

Esercizio 5. Sia $M_2(\mathbb{R})$ l'insieme delle matrici quadrate 2×2 a coefficienti reali. Data una funzione $f : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$, diciamo che f è invariante per similitudine se soddisfa la seguente condizione: *se due matrici $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ sono simili, allora $f(A) = f(B)$.*

Definiamo le funzioni $F : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ e $G : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ ponendo

$$F\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) := abcd \quad \text{e} \quad G\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) := a^2 + d^2 + 2bc$$

per ogni $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Si risponda ai seguenti quesiti, motivando la risposta con una dimostrazione o con un controesempio esplicito:

(5a) È vero che F è invariante per similitudine?

(5b) È vero che G è invariante per similitudine?

Geometria I - Appello 11 giugno 2013

SOLUZIONI

ESERCIZIO 1 Scriviamo $\mathcal{E}$ in forma matriciale: $AX=b$, ove

$$A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\3&-2&0\\1&-1&1\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\quad e\quad b=\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix}.$$

Poiché $\det(A)=-1\neq 0$, il teorema di Rouché-Capelli assicura che $\mathcal{E}$ ha una sola soluzione. Calcoliamola con Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}2&0&-1\\3&-2&0\\0&-1&1\end{vmatrix}}{-1}=\frac{-1}{-1}=1,$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}1&2&-1\\3&3&0\\1&0&1\end{vmatrix}}{-1}=\frac{0}{-1}=0$$

e

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1&0&2\\3&-2&3\\1&-1&0\end{vmatrix}}{-1}=\frac{1}{-1}=-1.$$

Segue che $Sol(\mathcal{E})=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\}$.

Applichiamo ora il metodo dell'inversa: $X=A^{-1}b$.

Calcoliamo A^{-1}:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-1&1&0&0\\3&-2&0&0&1&0\\1&-1&1&0&0&1\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-1&1&0&0\\0&-2&3&-3&1&0\\0&-1&2&-1&0&1\end{array}\right)\longrightarrow$$

$$\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-1&1&0&0\\0&1&-2&1&0&-1\\0&2&-3&3&-1&0\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-1&1&0&0\\0&1&-2&1&0&-1\\0&0&1&1&-1&2\end{array}\right)\longrightarrow$$

$$\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&2&-1&2\\0&1&0&3&-2&3\\0&0&1&1&-1&2\end{array}\right)\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}2&-1&2\\3&-2&3\\1&-1&2\end{pmatrix}$$

e $X=A^{-1}b=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$. ■

<u>ESERCIZIO 2</u> Siano $\mathcal{E}_3$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$ e $\mathcal{E}_4$ la base canonica di $\mathbb{R}^4$. Denotiamo con A_k la matrice associata a T_k rispetto a $\mathcal{E}_3$ e a $\mathcal{E}_4$:

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & -1 & k \\ k & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ k & 0 & 4 \end{pmatrix} \in M_{4,3}(\mathbb{R}) \qquad \forall k \in \mathbb{R}.$$

(2a) T_k è iniettiva se e soltanto se $rk(T_k)=3$. Poichè

$$rk(A_k) = rk\left(\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} k \\ 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} k & -1 \\ k & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ 4 \end{matrix} \end{pmatrix}\right) \quad e \quad \det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0,$$

il principio dei minori orlati assicura che $rk(A_k) \geq 2$ $\forall k \in \mathbb{R}$ e

$$rk(A_k) = 3 \text{ se e soltanto se } \begin{cases} \begin{vmatrix} 1 & -1 & k \\ 0 & 1 & 3 \\ k & -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \\ \begin{vmatrix} 1 & -1 & k \\ 0 & 1 & 3 \\ k & 0 & 4 \end{vmatrix} \neq 0 \end{cases}$$

ovvero se e soltanto se $k^2 - 3k + 4 \neq 0$, cioè se $k \notin \{1, -4\}$.

(2b) Risolvendo il sistema che definisce W otteniamo:

$$W: \begin{cases} y_1 = -y_2 - y_4 \\ y_3 = -y_4 \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad W = \left\{ \begin{pmatrix} -s-t \\ s \\ -t \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; t,s \in \mathbb{R} \right\}.$$

Una base di W è data dai vettori $v_1 := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $v_2 := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Poichè $\dim_{\mathbb{R}}(W) = 2$, vale $\dim_{\mathbb{R}}(W^\perp) = 4-2 = 2$. Grazie al punto precedente, se $Im(T_k) = W^\perp$, allora $k=1$ oppure $k=-4$.

<u>Caso: $k=1$</u> Si osservi che $Im(T_1) = \langle w_1, w_2 \rangle$ con $w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $w_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Poichè $\langle v_i, w_j \rangle_{\mathbb{R}^4} = 0$ $\forall i,j \in \{1,2\}$, si ha che $Im(T_1) \subset W^\perp$ e quindi, essendo $\dim_{\mathbb{R}}(Im(T_1)) = 2 = \dim_{\mathbb{R}}(W^\perp)$, vale $Im(T_1) = W^\perp$.

<u>Caso $k=-4$</u> In questo caso, il vettore $w = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ appartiene a $Im(T_{-4})$, ma $\langle v_1, w \rangle_{\mathbb{R}^4} \neq 0$. Segue che $Im(T_{-4}) \neq W^\perp$. ☒

ESERCIZIO 3 Sia $t \in \mathbb{R}$. Il polinomio caratteristico $p_{A_t}(\lambda)$ di A_t è dato da $-\lambda^3+\lambda^2$. Dunque, A_t ha due autovalori: $\lambda_1 := 0$ con $ma(\lambda_1, A_t) = 2$ e $\lambda_2 := 1$ con $ma(\lambda_2, A_t) = 1 = mg(\lambda_2, A_t)$. A_t risulterà diagonalizzabile se e soltanto se $mg(\lambda_1, A_t) = 2$, cioè se e soltanto se $rk(A_t) = 1$. Poiché

$$rk(A_t) = rk\left(\begin{pmatrix} 1 & -1-t \\ t & 0 \\ t & -t \end{pmatrix}\right) = rk\left(\begin{pmatrix} \boxed{1} & -1-t \\ t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}\right),$$

il principio dei minori orlati assicura che

$$rk(A_t) = 1 \text{ se e soltanto se } \begin{cases} \begin{vmatrix} 1 & -1-t \\ t & 0 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} 1 & -1-t \\ 0 & t \end{vmatrix} = 0 \end{cases},$$

cioè se e soltanto se $t = 0$.

Sia dunque $t = 0$. Valgono:

$$V_{\lambda_1}(A_0) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x+y-z = 0 \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

e

$$V_{\lambda_2}(A_0) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, y = 0, z = 0 \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Una base diagonalizzante per A_0 è data da $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.

ESERCIZIO 4 Completiamo i quadrati di q col metodo di Lagrange:

$$\begin{aligned} q(x,y,z) &= -5x^2+3y^2+z^2+2xy-4yz = \\ &= (z-2y)^2-4y^2-5x^2+3y^2+2xy = \\ &= (z-2y)^2-5x^2-y^2+2xy = \\ &= (z-2y)^2-(y-x)^2+x^2-5x^2 = \\ &= (z-2y)^2-(y-x)^2-4x^2 = \\ &= (z-2y)^2-(y-x)^2-(2x)^2. \end{aligned}$$

Segue che la segnatura di q è uguale a $(1,2)$ e $rk(q) = 1+2 = 3$.

Eseguiamo il cambiamento di variabili seguente

$$\begin{cases} x' := z - 2y \\ y' := y - x \\ z' := 2x \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad X' = MX,$$

ove $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ e $M = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{R})$.

Se $D := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$, vale:

$$X^T A X = q(x,y,z) = (x')^2 - (y')^2 - (z')^2 = (X')^T D (X') =$$

$$= (MX)^T D (MX) = X^T M^T D M X \quad \forall X \in \mathbb{R}^3$$

e quindi, essendo le matrici A e $M^T D M$ simmetriche, $A = M^T D M$. $\boxtimes$

<u>ESERCIZIO 5</u> (5a) F NON è invariante per similitudine. Infatti, la matrice $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ possiede due autovalori distinti (0 e 2) ed è dunque simile a $B := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Tuttavia, vale:

$$F(A) = 1 \neq 0 = F(B).$$

(5b) G è invariante per similitudine. Infatti, si ha:

$$G\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = a^2 + d^2 + 2bc = (a+d)^2 - 2(ad - bc),$$

ovvero $G(A) = (tr(A))^2 - det(A)$ $\forall A \in M_2(\mathbb{R})$. D'altra parte, se $A \in M_2(\mathbb{R})$ e $M \in GL_2(\mathbb{R})$, valgono:

$$tr(M^{-1} A M) = tr(A M M^{-1}) = tr(A),$$

$$det(M^{-1} A M) = \frac{1}{det(M)} det(A) \, det(M) = det(A)$$

e quindi

$$G(M^{-1} A M) = (tr(M^{-1} A M))^2 - det(M^{-1} A M) = (tr(A))^2 - det(A) =$$

$$= G(A). \; \boxtimes$$