GEOMETRIA I

Università degli Studi di Trento
Corso di Laurea in Matematica e Fisica
A.A. 2012/2013
5 febbraio 2013

Si svolgano i seguenti esercizi. Si terrà conto non solo della correttezza dei risultati, ma anche della completezza e chiarezza delle spiegazioni.

Esercizio 1. Per ogni $k \in \mathbb{R}$, si dica se il seguente sistema lineare $\mathcal{S}_k$ nelle incognite $(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$ è compatibile e, in caso affermativo, si calcolino tutte le soluzioni di $\mathcal{S}_k$:

$$\mathcal{S}_k : \begin{cases} -y + 2kz = 2k \\ kx + y + w = 2 \\ y - z + w = 1 \\ x - kz = -k \end{cases}.$$

Esercizio 2. Sia $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ l'endomorfismo definito ponendo

$$T((x, y, z, w)^T) := (-x - 2y + z + 2w, -y + w, -x - 2y + z + 2w, -y + w)^T.$$

Si risponda ai seguente quesiti:

(2a) Si dimostri che $\mathrm{Ker}(T) = \mathrm{Im}(T)$ e si deduca da questa uguaglianza (senza calcolare il polinomio caratteristico di T) che lo spettro di T è uguale a $\{0\}$.

(2b) Sia W il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ definito dalla seguente equazione cartesiana

$$x + y - z - w = 0.$$

Si calcoli una base del sottospazio vettoriale $T(W)$ di $\mathbb{R}^4$.

Esercizio 3. Sia $A \in M_3(\mathbb{C})$ la seguente matrice complessa

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} & 1 \\ -\mathrm{i} & 1 & -\mathrm{i} \\ 1 & \mathrm{i} & 1 \end{pmatrix},$$

dove $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$ è l'unità immaginaria. Si dica se A è unitariamente diagonalizzabile e, in caso affermativo, si calcoli una base ortonormale di $\mathbb{C}^3$ diagonalizzante per l'operatore $L_A : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3$ associato ad A e una matrice $P \in \mathrm{SU}(3)$ tale che $P^H AP$ è diagonale.

Esercizio 4. Per ogni $k \in \mathbb{R}$, si dica se le seguenti matrici in $M_3(\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & k & k \\ 1 & k & k \end{pmatrix}$$

sono congruenti e, in caso affermativo, si calcoli una matrice $M_k \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ tale che $A = M_k^T B_k M_k$.

Esercizio 5. Sia n un intero positivo e sia $A \in M_{2n}(\mathbb{R})$ la seguente matrice a blocchi

$$A = \left(\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline \mathbf{0} & D \end{array}\right),$$

dove $B, C, D \in M_n(\mathbb{R})$ e $\mathbf{0}$ è la matrice nulla in $M_n(\mathbb{R})$. Si risponda ai seguenti quesiti:

(5a) Si dimostri che $\mathrm{rk}(B)+\mathrm{rk}(D) \leq \mathrm{rk}(A)$ e si fornisca un esempio in cui $\mathrm{rk}(B)+\mathrm{rk}(D) < \mathrm{rk}(A)$.

(5b) Si dimostri che vale l'uguaglianza $\mathrm{rk}(B) + \mathrm{rk}(D) = \mathrm{rk}(A)$ se $C = \mathbf{0}$.

Soluzioni

Esercizio 1. Riduciamo a gradini la matrice associata al sistema, effettuando al primo passaggio lo scambio tra la prima e la quarta colonna:

$$
\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & 2k & 0 & 2k \\ k & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -k & 0 & -k \end{array}\right)
\mapsto
\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} w & y & z & x \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & 2k & 0 & 2k \\ 1 & 1 & 0 & k & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -k & 1 & -k \end{array}\right) \end{array}
\mapsto
\begin{array}{c} II \\ I \\ \\ \\ \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} w & y & z & x \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & k & 2 \\ 0 & -1 & 2k & 0 & 2k \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -k & 1 & -k \end{array}\right) \end{array}
\mapsto
$$

$$
\mapsto
\begin{array}{c} \\ \\ I-III \\ \\ \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} w & y & z & x \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & k & 2 \\ 0 & -1 & 2k & 0 & 2k \\ 0 & 0 & 1 & k & 1 \\ 0 & 0 & -k & 1 & -k \end{array}\right) \end{array}
\mapsto
\begin{array}{c} \\ \\ \\ IV+kIII \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} w & y & z & x \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & k & 2 \\ 0 & -1 & 2k & 0 & 2k \\ 0 & 0 & 1 & k & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1+k^2 & 0 \end{array}\right) \end{array}.
$$

Per ogni $k \in \mathbb{R}$, $1 + k^2 \neq 0$ e quindi il sistema è compatibile ed ammette un'unica soluzione. Sia $k \in \mathbb{R}$. Torniamo ora al sistema:

$$
\begin{cases} w + y + kx = 2 \\ -y + 2kz = 2k \\ x + z = 1 \\ (1 + k^2)x = 0 \end{cases}
\iff
\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 1 \\ w = 2 \end{cases}.
$$

Segue che $\mathrm{Sol}(\mathcal{S}_k) = \{(0, 0, 1, 2)^T\}$ per ogni $k \in \mathbb{R}$.

Esercizio 2. (2a) La matrice associata all'endomorfismo T rispetto alla base canonica $\mathtt{C}_4$ di $\mathbb{R}^4$ è la seguente:

$$
\mathcal{M}_{\mathtt{C}_4}(T) = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
$$

Questa matrice ha rango 2 in quanto sono presenti due coppie di colonne (o righe) uguali e il minore principale di testa di ordine 2 è diverso da zero. Dunque una base di $\mathrm{Im}(T)$ è data da (v_1, v_2), dove $v_1 := (1, 0, 1, 0)^T$ e $v_2 := (2, 1, 2, 1)^T$. Grazie al teorema di nullità più rango, si ha che $\dim(\mathrm{Ker}(T)) = 4 - \dim(\mathrm{Im}(T)) = 2$ e quindi $\dim(\mathrm{Ker}(T)) = \dim(\mathrm{Im}(T)) = 2$. In tal modo, per dimostrare che $\mathrm{Ker}(T) = \mathrm{Im}(T)$, è sufficiente far vedere che $\mathrm{Im}(T) \subset \mathrm{Ker}(T)$ ovvero che $\{v_1, v_2\} \subset \mathrm{Ker}(T)$. Quest'ultima inclusione è soddisfatta in quanto è immediato verificare che $T(v_1) = T(v_2) = (0, 0, 0, 0)^T$.

Proviamo ora che lo spettro $\sigma(T)$ di T è uguale a $\{0\}$. Innanzitutto osserviamo che $\dim \mathrm{Ker}(T) = 2 > 0$ e quindi $0 \in \sigma(T)$. Supponiamo per assurdo che esista $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$. Sia v un autovettore di T relativo a λ. Poiché $v = T(\frac{1}{\lambda}v)$, si ha che $v \in \mathrm{Im}(T)$ e quindi $v \in \mathrm{Ker}(T)$, essendo $\mathrm{Im}(T) = \mathrm{Ker}(T)$. Segue che $\lambda v = T(v) = 0$, ovvero $\lambda = 0$ che è assurdo. Ciò prova che $\sigma(T) \subset \{0\}$[1] da cui la tesi: $\sigma(T) = \{0\}$.

(2b) Risolviamo l'equazione di W in x ed esprimiamo W in forma parametrica:

$$
x = -y + z + w \implies W = \{(-t + s + r, t, s, r)^T \in \mathbb{R}^4 \mid t, s, r \in \mathbb{R}\}.
$$

Una base di W è data dunque da (w_1, w_2, w_3), dove $w_1 := (-1, 1, 0, 0)^T$, $w_2 := (1, 0, 1, 0)^T$ e $w_3 := (1, 0, 0, 1)^T$. Osserviamo ora che $T(w_1) = (-1, -1, -1, -1)^T$, $T(w_2) = (0, 0, 0, 0)^T$ e $T(w_3) = (1, 1, 1, 1)^T = -T(w_1)$. Poiché $T(W) =< T(w_1), T(w_2), T(w_3) >$ (perché?), segue che $((1, 1, 1, 1)^T)$ è una base di $T(W)$.

[1] Un altro modo di dimostrare che $\sigma(T) \subset \{0\}$ è il seguente. Se $\lambda \in \sigma(T)$ e v è un autovettore di T relativo a λ, allora $\lambda^2 v = T(T(v))$ e $T(T(v)) = 0$ in quanto $T(v) \in \mathrm{Im}(T) = \mathrm{Ker}(T)$. Segue che $\lambda = 0$.

Esercizio 3. Poiché B è hermitiana (cioè $B^H = B$), il teorema spettrale (caso hermitiano) assicura che A è unitariamente diagonalizzabile, anzi unitariamente simile ad una matrice diagonale con elementi diagonali reali.

Calcoliamo il polinomio caratteristico di B sviluppando il corrispondente determinante rispetto alla prima riga:

$$P_B(T) = \begin{vmatrix} 1-T & \mathrm{i} & 1 \\ -\mathrm{i} & 1-T & -\mathrm{i} \\ 1 & \mathrm{i} & 1-T \end{vmatrix} = (1-T)\big((1-T)^2+\mathrm{i}^2\big) - \mathrm{i}(-\mathrm{i}+\mathrm{i}T+\mathrm{i}) + (-\mathrm{i}^2-1+T) =$$
$$=(1-T)(T^2-2T)+2T = -T^2(T-3).$$

Segue che $\sigma(A) = \{\lambda_0, \lambda_1\}$ con $\lambda_0 = 0$ e $\lambda_1 = 1$.

Calcoliamo ora una base ortonormale di $\mathbb{V}_{\lambda_0}(B)$. Ricordiamo che $\mathbb{V}_{\lambda_0}(B)$ è uguale all'insieme delle soluzioni del sistema lineare $BX = 0$, ove $X = (x_1, x_2, x_3)^T$. Applicando la procedura di eliminazione di Gauss–Jordan a tale sistema, otteniamo:

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} & 1 \\ -\mathrm{i} & 1 & -\mathrm{i} \\ 1 & \mathrm{i} & 1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{array}{r} \\ II+\mathrm{i}I \\ III-I \end{array} \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

In altre parole il sistema lineare $BX = 0$ è equivalente all'equazione $x_1 + \mathrm{i}x_2 + x_3 = 0$ ovvero $x_1 = -\mathrm{i}x_2 - x_3$. Dunque $\mathbb{V}_{\lambda_0}(B) = \mathrm{Sol}(BX = 0) = \{(-\mathrm{i}t - s, t, s)^T \in \mathbb{C}^3 \,|\, t, s \in \mathbb{C}\}$ e quindi, posto $v_1 := (-1, 0, 1)^T$ e $v_2 := (-\mathrm{i}, 1, 0)^T$, (v_1, v_2) è una base di $\mathbb{V}_{\lambda_0}(B)$.

Applichiamo Gram–Schmidt a tale base di $\mathbb{V}_{\lambda_0}(A)$:

- $w_1 := v_1$, $\langle w_1, w_1\rangle_{\mathbb{C}^3} = 2$, $\|w_1\|_{\mathbb{C}^3} = \sqrt{\langle w_1, w_1\rangle_{\mathbb{C}^3}} = \sqrt{2}$;
- $w_2 := v_2 - \dfrac{\langle v_2, w_1\rangle_{\mathbb{C}^3}}{\langle w_1, w_1\rangle_{\mathbb{C}^3}} w_1 = \begin{pmatrix} -\mathrm{i} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \dfrac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} -\mathrm{i} & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\mathrm{i}}{2} \\ 1 \\ -\frac{\mathrm{i}}{2} \end{pmatrix}$,

  $\langle w_2, w_2\rangle_{\mathbb{C}^3} = \left|-\dfrac{\mathrm{i}}{2}\right|^2 + |1|^2 + \left|\dfrac{\mathrm{i}}{2}\right|^2 = \dfrac{3}{2}$, $\|w_2\|_{\mathbb{C}^3} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$;
- $\hat{w}_1 := \dfrac{w_1}{\|w_1\|_{\mathbb{C}^3}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\hat{w}_2 := \dfrac{w_2}{\|w_2\|_{\mathbb{C}^3}} = \dfrac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -\mathrm{i} \\ 2 \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix}$.

Segue che $(\hat{w}_1, \hat{w}_2)$ è una base ortonormale di $\mathbb{V}_{\lambda_0}(B)$.

Passiamo ora a $\mathbb{V}_{\lambda_2}(B)$. Applichiamo la procedura di eliminazione di Gauss–Jordan al sistema lineare $(B - \lambda_1 I_3)X = 0$ ottenendo:

$$\begin{pmatrix} -2 & \mathrm{i} & 1 \\ -\mathrm{i} & -2 & -\mathrm{i} \\ 1 & \mathrm{i} & -2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{array}{r} III \\ \\ I \end{array} \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} & -2 \\ -\mathrm{i} & -2 & -\mathrm{i} \\ -2 & \mathrm{i} & 1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{array}{r} \\ II+\mathrm{i}I \\ III+2I \end{array} \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} & -2 \\ 0 & 3\mathrm{i} & -3 \\ 0 & 3\mathrm{i} & -3 \end{pmatrix} \longmapsto$$
$$\longmapsto \begin{array}{r} \\ (-\mathrm{i}/3)II \\ III-II \end{array} \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} & -2 \\ 0 & 1 & \mathrm{i} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Segue che

$$\mathbb{V}_{\lambda_1}(B) = \mathrm{Sol}\left(\left\{ \begin{array}{l} x_1 + \mathrm{i}x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_2 + \mathrm{i}x_3 = 0 \end{array} \right.\right) = \{(t, -\mathrm{i}t, t)^T \in \mathbb{C}^3 \,|\, t \in \mathbb{C}\} = < v_3 >,$$

dove $v_3 = (1, -\mathrm{i}, 1)^T$. Posto $\hat{w}_3 := v_3/\|v_3\|_{\mathbb{C}^3} = (1/\sqrt{3})(1, -\mathrm{i}, 1)^T$, si ha che $(\hat{w}_3)$ è una base ortonormale di $\mathbb{V}_{\lambda_1}(B)$.

Segue che $\mathcal{C} := (\hat{w}_1, \hat{w}_2, \hat{w}_3)$ è una base ortonormale di $\mathbb{C}^3$ diagonalizzante (via similitudine) per L_B. La matrice $\mathcal{M}_{\mathrm{C}_3,\mathcal{C}}(\mathbf{1}_{\mathbb{C}^3}) \in \mathrm{U}(4)$ ha per colonne $\hat{w}_1, \hat{w}_2, \hat{w}_3$ e quindi vale:

$$\det(\mathcal{M}_{\mathrm{C}_3,\mathcal{C}}(\mathbf{1}_{\mathbb{C}^3})) = \begin{vmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -\mathrm{i} & 1 \\ 0 & 2 & -\mathrm{i} \\ 1 & -\mathrm{i} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}(-6) = -1.$$

Poiché $\det(\mathcal{M}_{\mathbb{C}_3,\mathcal{C}}(\mathbf{1}_{\mathbb{C}^3})) = -1 \neq 1$, si ha che $\mathcal{M}_{\mathbb{C}_3,\mathcal{C}}(\mathbf{1}_{\mathbb{C}^3}) \notin \mathrm{SU}(3)$, cioè $\mathcal{M}_{\mathbb{C}_3,\mathcal{C}}(\mathbf{1}_{\mathbb{C}^3})$ non è unitaria speciale.

Attenzione. Una diversa scelta della base $\mathcal{C}$ di $\mathbb{C}^3$ potrebbe fornire una matrice $\mathcal{M}_{\mathbb{C}_3,\mathcal{C}}(\mathbf{1}_{\mathbb{C}^3}) \in \mathrm{SU}(3)$.

Nota. Lo studente può trovare esercizi simili a quello appena svolto sul "Foglio di esercizi 12":

`http://science.unitn.it/~carrara/MICHELA/`

Esercizio 4. Si osservi che $\det(A) = 0$, ovvero $\mathrm{rk}(A) \leq 2$. Poiché il rango è un invariante per congruenza, se B_k è congruente ad A, allora $\mathrm{rk}(B_k) \leq 2$ e quindi $-k = \det(B_k) = 0$ [2]. Segue che A e B_k possono essere congruenti solo nel caso $k = 0$. Studiamo dunque tale caso.

Consideriamo le forme quadratiche $q_A(x) = x^T Ax$ e $q_{B_0}(x) = x^T B_0 x$ su $\mathbb{R}^3$ associate ad A e a B_0 rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$. Applichiamo la tecnica di completamento dei quadrati di Lagrange a q_A e a q_{B_0}:

$$\begin{aligned} q_A(x) &= \boldsymbol{x_1^2} - 3x_2^2 + 3x_3^2 \boldsymbol{- 2x_1x_2 + 4x_1x_3} = \\ &= \boldsymbol{(x_1 - x_2 + 2x_3)^2 - x_2^2 - 4x_3^2 + 4x_2x_3} - 3x_2^2 + 3x_3^2 = \\ &= (\underline{x_1} - x_2 + 2x_3)^2 \boldsymbol{-4x_2^2} - x_3^2 \boldsymbol{+ 4x_2x_3} = (\underline{x_1} - x_2 + 2x_3)^2 - (2\underline{x_2} - x_3)^2 \end{aligned}$$

e

$$q_{B_0}(x) = \boldsymbol{x_1^2 + 2x_1x_3} = (\underline{x_1} + x_3)^2 - \underline{x_3}^2.$$

Le segnature di q_A e di q_{B_0} sono entrambe uguali a $(1,1)$. Le matrici A e B_0 sono dunque congruenti.

Calcoliamo la desiderata matrice $M_0 \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$. Consideriamo il seguente cambiamento formale di coordinate:

$$\begin{cases} y_1 = \underline{x_1} - x_2 + 2x_3 \\ y_2 = 2\underline{x_2} - x_3 \\ y_3 = \underline{x_3} \end{cases},$$

che possiamo scrivere in forma matriciale ponendo $y = Mx$, dove $y = (y_1, y_2, y_3)^T$, $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ e

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Segue che

$$x^T Ax = q_A(x) = y_1^2 - y_2^2 = y^T Dy = x^T M^T DMx \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}^3,$$

dove

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Poiché le matrici A e $M^T DM$ sono simmetriche, si ha che $A = M^T DM$ (perché?).

Consideriamo il cambiamento formale di variabili $z = Nx$, dove $z = (z_1, z_2, z_3)^T$ e

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vale:

$$x^T B_0 x = q_{B_0}(x) = z_1^2 - z_2^2 = z^T Dz = x^T N^T DNx \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}^3$$

e quindi $B_0 = N^T DN$. Segue che $D = (N^{-1})^T B_0 (N^{-1})$ e $A = M^T (N^{-1})^T B_0 N^{-1} M = (N^{-1}M)^T B_0 (N^{-1}M)$

È ora sufficiente porre

$$M_0 := N^{-1}M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

[2] Quest'ultima uguaglianza può esser dimostrata anche direttamente mediante la formula di Binet. Infatti, se B_k è congruente ad A, allora $B_k = N_k^T AN_k$ per qualche $N_k \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ e quindi $\det(B_k) = \det(N_k)^2 \det(A) = 0$.

Nota. Lo studente può trovare esercizi simili a quello appena svolto sul "Foglio di esercizi 12":
`http://science.unitn.it/~carrara/MICHELA/`

Esercizio 5. (5a) Definiamo $b := \mathrm{rk}(B)$ e $d := \mathrm{rk}(D)$. A meno di riordinare le prime n righe, le ultime n righe, le prime n colonne e le ultime n colonne di A, possiamo supporre che la sottomatrice $B' := A(1, \ldots, b \,|\, 1, \ldots, b)$ di B e la sottomatrice $D' := A(n+1, \ldots, n+d \,|\, n+1, \ldots, n+d)$ di D siano invertibili. Definiamo la sottomatrice C' di C e la sottomatrice A' di A ponendo:

$$C' := A(1, \ldots, b \,|\, n+1, \ldots, n+d)$$

e

$$A' = A(1, \ldots, b, n+1, \ldots, n+d \,|\, 1, \ldots, b, n+1, \ldots, n+d).$$

Osserviamo che A' è una matrice triangolare a blocchi della seguente forma:

$$A' = \left(\begin{array}{c|c} B' & C' \\ \hline \mathbf{0} & D' \end{array} \right).$$

Poiché $\det(A') = \det(B')\det(C') \neq 0$ e l'ordine di A' è uguale a $b+d$, sia ha che A' è invertibile e quindi $\mathrm{rk}(A) \geq b+d$, come desiderato.

Ponendo $B = D := (0) \in M_1(\mathbb{R})$ e $C := (1) \in M_1(\mathbb{R})$, la corrispondente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

ha la seguente proprietà: $\mathrm{rk}(A) = 1 > 0 + 0 = \mathrm{rk}(B) + \mathrm{rk}(D)$.

(5b) Supponiamo $C = \mathbf{0}$. Siano $b := \mathrm{rk}(B)$ e $d := \mathrm{rk}(D)$ come sopra. Grazie al punto precedente, è sufficiente dimostre che

$$\mathrm{rk}(A) \leq b + d.$$

A meno di riordinare le prime n colonne e le ultime n colonne di A, possiamo supporre che sia le prime b colonne $B_{(1)}, \ldots, B_{(b)}$ di B che le prime d colonne $D_{(1)}, \ldots, D_{(d)}$ di D siano linearmente indipendenti. Per ogni $i \in \{b+1, \ldots, n\}$ e per ogni $j \in \{d+1, \ldots, n\}$, esistono (unici) $\beta_{i1}, \ldots, \beta_{ib} \in \mathbb{R}$ e $\delta_{j1}, \ldots, \delta_{jd} \in \mathbb{R}$ tali che

$$B_{(i)} = \beta_{i1} B_{(1)} + \ldots + \beta_{ib} B_{(b)}$$

e

$$D_{(j)} = \delta_{j1} D_{(1)} + \ldots + \delta_{jd} D_{(d)}.$$

Poiché

$$A_{(i)} = \left(\begin{array}{c} B_{(i)} \\ \hline 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right) \quad \text{e} \quad A_{(n+j)} = \left(\begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \hline D_{(j)} \end{array} \right)$$

per ogni $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, si ha che

$$A_{(i)} = \beta_{i1} A_{(1)} + \ldots + \beta_{ib} A_{(b)}$$

e

$$A_{(n+j)} = \delta_{j1} A_{(n+1)} + \ldots + \delta_{jd} A_{(n+d)}$$

per ogni $i \in \{b+1, \ldots, n\}$ e per ogni $j \in \{d+1, \ldots, n\}$. Segue che

$$\mathrm{rk}(A) = \dim_{\mathbb{R}} \left(< A_{(1)}, \ldots, A_{(b)}, A_{(n+1)}, \ldots, A_{(n+d)} > \right) \leq b + d.$$