

Rango.

Per calcolare il rango di una matrice possiamo utilizzare i sottodeterminanti oppure i pivot. Infatti valgono le seguenti proprietà equivalenti:

- (1) Il rango di una matrice A corrisponde al massimo ordine di una sua sottomatrice (quadrata) con determinante non nullo.
- (2) Il rango di una matrice A corrisponde al numero dei suoi pivot, una volta che A è stata ridotta a gradini.
- (3) Il rango di una matrice A è uguale al numero di righe linearmente indipendenti.
- (4) Il rango di una matrice A è uguale al numero di colonne linearmente indipendenti.

OSSERVAZIONI

- Come conseguenza delle proprietà 3) e 4) si ha che se A è una matrice $n \times m$, allora $\text{rg}(A) \leq \min\{m, n\}$
 - Per utilizzare la proprietà 1) si può anche ridurre (parzialmente) a gradini la matrice in quanto nella riduzione può variare il valore del determinante, ma non varia il fatto che esso sia zero o diverso da zero.
-

Rouchè-Capelli.

Un sistema di equazioni $AX = b$ ammette soluzioni (è compatibile) se e solo se il rango della matrice dei coefficienti A è uguale al rango della matrice completa $A|b$:

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b)$$

Inoltre:

- Ammette un'unica soluzione se $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) =$ numero delle incognite.
 - Ammette infinite soluzioni se $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) <$ numero delle incognite.
-

Spazi vettoriali.

Sia di qui in poi V uno spazio vettoriale e v, v_1, \dots, v_n elementi di V . (V può essere un sottospazio di \mathbb{R}^m , o uno spazio di matrici, o uno spazio di polinomi, o...).

v è **combinazione lineare** di v_1, \dots, v_n se l'equazione vettoriale:

$$x_1v_1 + x_2v_2 + \dots + x_nv_n = v$$

ammette soluzione.

Nel caso particolare in cui $V \subseteq \mathbb{R}^m$, alla precedente equazione possiamo associare la matrice $A|b$, dove le colonne di A sono date dai vettori v_1, \dots, v_n e b è data dal vettore v . In tale caso:

$$v \text{ è } \mathbf{combinazione lineare} \text{ di } v_1, \dots, v_n \text{ sse } \text{rg}(A) = \text{rg}(A|b)$$

v_1, \dots, v_n sono **linearmente indipendenti** se l'equazione vettoriale:

$$x_1v_1 + x_2v_2 + \dots + x_nv_n = 0$$

ammette la **sola** soluzione nulla $x_1 = x_2 = \dots, x_n = 0$.

Nel caso particolare in cui $V \subseteq \mathbb{R}^m$, alla precedente equazione possiamo associare la matrice $A|0$, dove le colonne di A sono date dai vettori v_1, \dots, v_n . In tale caso:

$$v_1, \dots, v_n \text{ sono } \mathbf{linearmente indipendenti} \text{ sse } \operatorname{rg}(A) = n$$

Sia $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ un sottinsieme di V . Diciamo che S è una **base** di V se:

- (1) S è un insieme generatore di V : $V = \langle S \rangle$, cioè ogni elemento di V si può scrivere come combinazione lineare degli elementi di S .
- (2) Gli elementi di S sono linearmente indipendenti.

La **dimensione** di uno spazio vettoriale corrisponde al numero di elementi di una sua base.

Nel caso particolare in cui $V = \mathbb{R}^n$ sappiamo che S per essere una base deve essere formato da n elementi, ed è sufficiente verificare che gli n elementi di S siano linearmente indipendenti. Ragionando sui ranghi, n **vettori di \mathbb{R}^n formano una base di \mathbb{R}^n se e solo se la matrice associata ha rango n .**

Spazi vettoriali particolari

- Nel caso particolare di $V = \langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle \subseteq \mathbb{R}^m$, se indichiamo con A la matrice formata dai vettori colonna v_1, \dots, v_n , allora:

$$\begin{aligned} \dim(V) &= \operatorname{rg}(A) \\ \mathcal{B}(V) &= \{\text{vettori linearmente indipendenti tra } v_1, \dots, v_n\} \\ &= \{\text{vettori tra } v_1, \dots, v_n \text{ corrispondenti ai pivot di } A\} \end{aligned}$$

- Nel caso particolare di $V = \{ \text{soluzioni di un sistema omogeneo} \}$, se indichiamo con A la matrice associata al sistema e con n il numero delle incognite, allora:

$$\begin{aligned} \dim(V) &= n - \operatorname{rg}(A) \\ \mathcal{B}(V) &= \{\text{generatori delle soluzioni una volta scritte in forma vettoriale}\} \end{aligned}$$
