CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA

RETTE E PIANI – GEOMETRIA E ALGEBRA 2012/13

Dati due punti A e B in $\mathbb{R}^2$ o in $\mathbb{R}^3$, il **vettore direzione** determinato da A e B è un qualsiasi vettore multiplo di $\overrightarrow{u}_{AB} = (x_A - x_B,\ y_A - y_B)$ se siamo in $\mathbb{R}^2$ o di $\overrightarrow{u}_{AB} = (x_A - x_B,\ y_A - y_B, z_A - z_B)$ se siamo in $\mathbb{R}^3$.

Rette

- In $\mathbb{R}^2$ l'equazione **parametrica** della **retta** passante per $P(x_0, y_0)$ e di direzione parallela al vettore $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2)$ è:

$$r: \begin{cases} x = x_0 + u_1 t \\ y = y_0 + u_2 t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

- In $\mathbb{R}^2$ la generica equazione **cartesiana** di una **retta** è:

$$r: \quad ax + by + k = 0$$

- In $\mathbb{R}^3$ l'equazione **parametrica** della **retta** passante per $P(x_0, y_0, z_0)$ e di direzione parallela al vettore $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3)$ è:

$$r: \begin{cases} x = x_0 + u_1 t \\ y = y_0 + u_2 t \\ z = z_0 + u_3 t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

- In $\mathbb{R}^3$ la generica equazione **cartesiana** di una **retta** è data dall'intersezione di due piani:

$$r: \begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = k_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = k_2 \end{cases}$$

Piani

- In $\mathbb{R}^3$ l'equazione **parametrica** del **piano** passante per $P(x_0, y_0, z_0)$ e di direzioni parallele ai vettori $\overrightarrow{u} = (u_1,\ u_2,\ u_3)$ e $\overrightarrow{v} = (v_1,\ v_2,\ v_3)$ è:

$$\pi: \begin{cases} x = x_0 + u_1 t + v_1 s \\ y = y_0 + u_2 t + v_2 s \\ z = z_0 + u_3 t + v_3 s \end{cases} \quad \forall s, t \in \mathbb{R}$$

- In $\mathbb{R}^3$ la generica equazione **cartesiana** di un **piano** è :

$$\pi: \quad ax + by + cz = d$$

  Il vettore (a, b, c) ha direzione **perpendicolare** al piano. Notiamo che i coefficienti a, b, c e d non sono unicamente determinati, ma possono variare a meno di multipli.

Posizione tra rette e piani

- Due rette r_1 e r_2 sono **parallele** se hanno la stessa direzione, ovvero se i rispettivi vettori direzione sono proporzionali.
- In $\mathbb{R}^3$ due rette r_1 e r_2 sono **sghembe** se non sono parallele e non si intersecano.

- In $\mathbb{R}^3$ due rette r_1 e r_2 sono **incidenti** se si intersecano in un punto.
- In $\mathbb{R}^3$ due rette r_1 e r_2 sono **complanari** se non sono sghembe, ovvero se sono parallele oppure si intersecano.
- Due piani π_1 e π_2 sono **paralleli** se non si intersecano. Analogamente due piani $\pi_1 : \ a_1x + b_1y + c_1z = k_1$ e $\pi_2 : \ a_2x + b_2y + c_2z = k_2$ sono paralleli se i vettori (a_1, b_1, c_1) e $(a_2, b_2.c_2)$ sono proporzionali.
- Se due piani π_1 e π_2 non sono paralleli allora si intersecano in una retta. Un'equazione cartesiana della retta intersezione è data dal sistema formato dalle equazioni dei due piani:
$$r = \pi_1 \cap \pi_2 : \begin{cases} \pi_1 \\ \pi_2 \end{cases}$$
- Una retta r è **perpendicolare** al piano $\pi : \ ax + by + cz = k$ se r ha direzione parallela al vettore $u = (a, b, c)$.

Prodotto scalare e angoli

- Dati due vettori $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$ di R^3 chiamiamo **prodotto scalare** di $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ il **numero**:
$$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}^T = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3.$$
- Data una retta r_1 parallela a un vettore u e una retta r_2 parallela a un vettore v, l'**angolo** ϑ tra le due rette è dato da:
$$\cos(\vartheta) = \frac{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})}{|\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}|} = \frac{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}^T}{|\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}|},$$
dove $|\overrightarrow{u}|$ =**norma** di $\overrightarrow{u}$= **lunghezza** di $\overrightarrow{u}$ =$\sqrt{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u})} = \sqrt{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u}^T}$.

Prodotto vettoriale, area e volume

- Dati due vettori $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$ di R^3 chiamiamo **prodotto vettoriale** di u e v il vettore:
$$\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = (u_2v_3 - u_3v_2, \ u_3v_1 - u_1v_3, \ u_1v_2 - u_2v_1) = \det \begin{bmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$$
- L'**Area di un parallelogramma** in $\mathbb{R}^2$, di lati $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2)$, $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2)$ è:
$$\text{Area(parallelogramma)} = |u_1v_2 - u_2v_1| = \left| \det \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{bmatrix} \right|$$
- L'**Area di un parallelogramma** in $\mathbb{R}^3$, di lati $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$ è data dalla lunghezza (norma) $|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}|$ del vettore $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$ prodotto vettoriale di $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$:
$$\text{Area(parallelogramma)} = |u \times v|,$$
- Il **volume del parallelepipedo** di lati $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$ e $\overrightarrow{w} = (w_1, w_2, w_3)$ è uguale al valore assoluto del prodotto misto $(\overrightarrow{u}, \ \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w})$:
$$\text{Volume(parallelepipedo)} = |(\overrightarrow{u}, \ \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w})| = \left| \det \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix} \right|$$
