CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA

FOGLIO DI ESERCIZI 9– GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE 2012/13

Esercizio 9.1. *[8.40]* Sia $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione definita da $T(x, y) = (2x, x - y, 2y)$, e siano $\mathcal{B} = ((1, 0),\ (1, 1)\ )$ e $\mathcal{B}' = ((1, 1, 0),\ (0, 1, 1),\ (0, 0, 2))$ due basi di $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ rispettivamente. Determinare la matrice $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(T)$ associata a T rispetto alle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$.

Esercizio 9.2. *[8.44]* Sia $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$la funzione lineare associata a:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

rispetto alla base $((1, 1, 1),\ (0, 2, 2),\ (0, 0, 3))$ di $\mathbb{R}^3$.

a) Si scriva la matrice associata a S rispetto alla base canonica.
b) Determinare basi dell'immagine $Im(S)$ e del nucleo $N(S)$.

Esercizio 9.3. *[8.36]* Sia $S : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare

$$S(x_1, x_2, x_3, x_4) = (3x_1 - 2x_3 + x_4,\ 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4,\ x_1 + 2x_3 + 2x_4).$$

a) Si trovi una base del nucleo di S e una base dell'immagine di S.
b) Sia $\mathcal{E}$ la base canonica di $\mathbb{R}^4$ e sia $\mathcal{B}$ la base di $\mathbb{R}^3$ costituita dai vettori

$$v_1 = (1, 0, 1),\ v_2 = (1, 0, 0),\ v_3 = (1, 1, 1)$$

Si determini la matrice $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(S)$ associata a S.

Esercizio 9.4. *[8.35]* Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare definita da

$$T(x, y, z) = (x + y,\ 2x - y - z,\ 2y + z)$$

e sia $\mathcal{B} = ((1, 2, -4),\ (0, 1, 1),\ (1, 0, -7))$ una base di $\mathbb{R}^3$.

a) Stabilire se T è iniettiva e/o suriettiva.
b) Si determini la matrice $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(T)$ associata a T rispetto alla base $\mathcal{B}$ e alla base canonica $\mathcal{E}$.
c) Si determini la matrice $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(T)$ associata a T rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$ e alla base $\mathcal{B}$.
d) Si determini la matrice $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(T)$ associata a T rispetto alla base $\mathcal{B}$.

Esercizio 9.5 (8.50). *Sia*

$$\mathcal{B} = \{v_1 = (1, 0, 1),\ v_2 = (0, -1, 0),\ v_3 = (2, 0, 0)\}$$

una base di $\mathbb{R}^3$ *e sia* T *l'endomorfismo di* $\mathbb{R}^3$ *così definito:*

$$T(v_1) = (3, 1, 2), \qquad T(v_2) = (0, 1, 1), \qquad T(v_3) = (6, 4, 6)$$

a) *Si determini la matrice* $M(T)$ *associata a* T *rispetto alla base canonica.*
b) *Si determini base e dimensione dell'Immagine e del Nucleo di* T.
c) *Si stabilisca per quali valori di* k *il vettore* $v_k = (k + 1, 0, k)$ *appartiene all'Immagine di* T.

Esercizio 9.6. *[9.1]* Verificare che $v = (1, 0, 0, 1)$ è autovettore dell'applicazione lineare T così definita

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_1 - 2x_3,\ -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4,\ x_3,\ x_1 - 2x_3 + x_4)$$

Determinare inoltre il relativo autovalore.

Esercizio 9.7 (9.3). *Sia* T *l'endomorfismo di* $\mathbb{R}^3$ *definito da*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

a) *Stabilire se esistono autovettori di* T *ed eventualmente determinarli.*
b) *Stabilire se* T *è diagonalizzabile.*
c) *Determinare la base rispetto alla quale* T *ha matrice associata* D *diagonale e determinare la matrice diagonale* D *e la matrice* P *diagonalizzante (cioé tale che* $P^{-1}AP = D$*).*

Esercizio 9.8. [Esercizio 9) cap. 7 del testo *Geometria e algebra lineare* di Manara, Perotti, Scapellato]
Riconoscere che le due seguenti matrici M sono diagonalizzabili, e calcolare per ciascuna di esse una matrice P diagonalizzante (tale cioè che valga $P^{-1}MP = D$, con D matrice diagonale; ricordiamo che P è una matrice le cui colonne sono autovettori di M).

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \qquad M = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Esercizio 9.9 (9.6)**.** *Date le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

a) *Si determini il polinomio caratteristico di ciascuna matrice.*
b) *Si determinino gli autovalori, e i relativi autospazi, di ciascuna matrice.*
c) *Si stabilisca se le matrici sono diagonalizzabili.*

Esercizio 9.10 (9.7)**.** *Date le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

a) *Si determini il polinomio caratteristico di ciascuna matrice.*
b) *Si determinino gli autovalori, e i relativi autospazi, di ciascuna matrice.*
c) *Si stabilisca se le matrici sono diagonalizzabili.*

Esercizio 9.11 (9.8)**.** *Si consideri la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) *Determinare autovalori e autovettori di A.*
b) *Stabilire se la matrice A è diagonalizzabile.*

Esercizio 9.12 (9.9)**.** *Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo a cui è associata la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

a) *Si determinino gli autovalori di T e si stabilisca se T è diagonalizzabile.*
b) *Si determini una base di R^3 formata da autovettori di T.*

Esercizio 9.13. [Esercizio 21) cap. 7 del testo *Geometria e algebra lineare* di Manara, Perotti, Scapellato]
Discutere la diagonalizzabilità delle seguenti matrici al variare del parametro reale k.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & k & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 0 & k & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Esercizio 9.14 (9.15)**.** *Sia T l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ cosí definito:*

$$T(x_1, x_2, x_3) = \left(x_1, x_1 - \frac{1}{2}x_3, x_2\right).$$

a) *Calcolare gli autovalori e gli autovettori di T.*
b) *T diagonalizzabile?*
c) *Se al campo dei numeri reali si sostituisce quello dei numeri complessi, l'endomorfismo di $\mathbb{C}^3$ che si ottiene è diagonalizzabile?*