

## CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA.

FOGLIO DI ESERCIZI 8- GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE 2012/13

**Esercizio 8.1.** [8.1] Sia  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'applicazione definita da  $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2, x_2, 2x_3)$ . Stabilire se  $T$  è lineare.

**Esercizio 8.2.** [8.2] Verificare che la funzione determinante definita sull'insieme delle matrici  $M_{2 \times 2}$  a valori in  $\mathbb{R}$  non è lineare.

**Esercizio 8.3.** [8.3] Stabilire se esiste una applicazione lineare  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tale che

$$T(1, 2) = (3, 0), \quad T(2, 7) = (4, 5), \quad T(1, 5) = (1, 4)$$

**Esercizio 8.4.** [8.4] Stabilire se esiste una applicazione lineare  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tale che

$$T(1, 2) = (3, 0), \quad T(2, 4) = (5, 0), \quad T(0, 1) = (1, 1)$$

**Esercizio 8.5.** [8.5] Determinare una applicazione lineare  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tale che

$$T(1, 1) = (1, 2), \quad T(0, 2) = (4, 4)$$

**Esercizio 8.6.** [v. 8.6] Sia  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'applicazione definita da  $T(x, y) = (x + y, 2x, x - y)$ .

- a) Verificare che  $T$  è lineare.
- b) Determinare Nucleo e Immagine di  $T$ .
- d) Determinare  $T(1, 2)$ .

**Esercizio 8.7.** [v. 8.7] Sia  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'applicazione lineare definita sulla base canonica di  $\mathbb{R}^2$  nel seguente modo:  $T(e_1) = (1, 2, 1)$ ,  $T(e_2) = (1, 0, -1)$ .

- a) Esplicitare  $T(x, y)$ .
- c) Stabilire se  $(3, 4, 1)$  appartiene a  $\text{Im}(T)$ .

**Esercizio 8.8.** [8.11] Sia  $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^5$  la funzione lineare definita da

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2, x_1 + x_2, x_2, x_2 + 3x_3, -x_1 - x_2)$$

- a) Trovare una base del nucleo  $N(T)$  e una base dell'immagine  $\text{Im}(T)$ .
- b) Dire se  $T$  è iniettiva e/o suriettiva.
- c) Per quali valori di  $k \in \mathbb{R}$  il vettore  $v_k = (k, 2, 1 - k, 4, -2)$  appartiene all'immagine di  $T$ ?

**Esercizio 8.9.** [8.12] Sia  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  la funzione lineare definita da:

$$T(x_1, x_2, x_3) = (2kx_1 - x_2, x_2 + kx_3, x_1 + x_2 - x_3, x_1 - x_2)$$

- a) Trovare le dimensioni del nucleo e dell'immagine di  $T$  al variare del parametro reale  $k$ .
- b) Stabilire per quali valori di  $k$  il vettore  $v = (3, 3, 1, 0)$  appartiene all'immagine di  $T$ .

**Esercizio 8.10.** [8.17]

- a) Verificare che le relazioni

$$T(1, 1, 1) = (-1, 2), \quad T(0, 1, 1) = (0, 4), \quad T(1, 1, 0) = (2, 1)$$

definiscono un'unica applicazione lineare  $T$  da  $\mathbb{R}^3$  a  $\mathbb{R}^2$ .

- b) Scrivere la matrice rappresentativa di  $T$  rispetto alla basi canoniche.
- c) Trovare basi di  $\text{Im}(T)$  e di  $N(T)$ .

**Esercizio 8.11.** [8.30] Sia  $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  la funzione lineare definita da  $T(x) = Ax$ , con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

- a) Stabilire se  $T$  invertibile.
- b) Trovare basi del nucleo e dell'immagine di  $T$ .

**Esercizio 8.12.** [8.16] Si consideri il seguente endomorfismo di  $\mathbb{R}^4$

$$T(x, y, z, w) = (-x + z, 2y, x - 2z, w)$$

- a) Si determinino le dimensioni di immagine e nucleo di  $T$  e si stabilisca se  $T$  è invertibile.

b) Si determini l'inversa  $T^{-1}$ .

**Esercizio 8.13.** [8.34] Sia  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'applicazione lineare definita ponendo

$$f(x, y, z) = (x + y - 2z, 3x - z, 2x - y + z)$$

e sia  $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'applicazione lineare definita ponendo

$$g(x, y, z) = (x + z, x - y + z, y)$$

Si trovino le dimensioni dei nuclei delle applicazioni lineari  $g \circ f$  e  $f \circ g$ .

**Esercizio 8.14.** [8.32] Si consideri la funzione lineare  $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  definita dalla matrice

$$\begin{bmatrix} 2k & 0 & 2 & 1 \\ k & 0 & 1 & 1 \\ k-1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Si dica se esistono valori del parametro reale  $k$  per i quali  $T$  è iniettiva o suriettiva.

b) Si calcoli la dimensione del nucleo  $N(T)$  e dell'immagine  $\text{Im}(T)$  al variare di  $k$ .

**Esercizio 8.15.** [8.15] Sia  $T$  l'endomorfismo di  $\mathbb{R}^3$  così definito:

$$T(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_3, -2x_1 + x_2 + x_3, x_2 + 2x_3).$$

a) Scrivere la matrice associata a  $T$  rispetto alle basi canoniche e determinare il nucleo e l'immagine di  $T$ .

b) Stabilire se  $T$  è iniettiva. Trovare, al variare del parametro reale  $k$ , tutti i vettori  $v$  tali che  $T(v) = (3, 3, k)$ .

**Esercizio 8.16.** [8.9] Sia  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'applicazione lineare definita da

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Determinare l'immagine attraverso  $T$  del piano  $\pi : x + 2y = 0$ .

**Esercizio 8.17.** [8.22] Sia  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'applicazione lineare tale che

$$T(x, y) = (kx + 4y, x + ky, y)$$

dove  $k \in \mathbb{R}$  è un parametro reale.

Stabilire se  $T$  è iniettiva e/o suriettiva al variare del parametro  $k$ .

**Esercizio 8.18.** [8.23] Sia  $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  l'applicazione lineare definita dalla matrice

$$A = M(T) = \begin{bmatrix} 5k & 1 & 3k+4 & 0 \\ k+1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & k+5 & 1 & k+3 \\ 2k^2 & 0 & k & 0 \end{bmatrix}$$

a) Discutere l'iniettività e suriettività di  $T$  al variare del parametro reale  $k$ .

b) Determinare la dimensione di immagine e nucleo di  $T$  al variare di  $k$ .

**Esercizio 8.19.** [8.24] Sia  $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'applicazione lineare tale che

$$T(x, y, z, w) = (-x - y + z + w, -x + 2y - z, -x + y + 3z - 3w)$$

a) Determinare la matrice  $A$  associata a  $T$  rispetto alla base canonica.

b) Determinare la dimensione e una base dello spazio vettoriale  $\text{Im}(T) \subseteq \mathbb{R}^3$ .

c) Determinare la dimensione e una base dello spazio vettoriale  $N(T) \subseteq \mathbb{R}^4$ .

**Esercizio 8.20.** [8.26] Sia  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  l'applicazione lineare definita da

$$T(x, y, z) = (x - y, 2x - 3y)$$

a) Dire se  $T$  è iniettiva e/o suriettiva.

b) Trovare le dimensioni del nucleo e dell'immagine di  $T$ .

**Esercizio 8.21.** [8.53] Sia  $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$  la base canonica di  $\mathbb{R}^3$ . Sia  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  la funzione lineare tale che:

$$T(e_1) = 3e_1 - e_2 + e_3, \quad T(e_2) = e_2 - e_3, \quad T(e_3) = 2T(e_1) + T(e_2)$$

a) Si calcoli la matrice associata a  $T$  rispetto ad  $\mathcal{E}$ .

b) Trovare basi del nucleo e dell'immagine di  $T$  e stabilire se  $T$  è invertibile.