CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA.

FOGLIO DI ESERCIZI 6– GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE 2012/13

Esercizio 6.1. *[7.27]* Si consideri il sottospazio $V = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ di $\mathbb{R}^5$ generato dai vettori

$$v_1 = (-1, 1, 2, 1, 0),\ v_2 = (0, 2, 1, 1, 0),\ v_3 = (1, 1, -1, 0, 0).$$

a) Trovare una base di V.
b) Determinare le coordinate del vettore $v = (-2, 6, 6, 4, 0) \in V$ rispetto alla base trovata al punto a).

Esercizio 6.2. *[7.33]* Si considerino i vettori di $\mathbb{R}^4$

$$v_1 = (1, 2, -1, 3), \quad v_2 = (-2, -4, 2, -6), \quad v_3 = (3, 6, k - 6, 3k)$$

a) Si stabilisca per quali valori di k il vettore v_3 appartiene al sottospazio $W = \langle v_1, v_2 \rangle$ generato da v_1 e v_2.
b) Si trovi, al variare di k, una base di W e una base del sottospazio $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$.

Esercizio 6.3. *[7.37]* Sia V lo spazio vettoriale generato dai vettori $v_1 = (1, -2, 4, 0)$, $v_2 = (2, 3, -1, 1)$ e $v_3 = (0, -1, 3, 0)$:

$$V = \langle v_1,\ v_2,\ v_3 \rangle$$

(1) Determinare la dimensione dello spazio vettoriale V.
(2) Determinare se il vettore $v_4 = (3, 1, 3, 1)$ appartiene a V. In caso positivo esprimere v_4 come combinazione lineare di $v_1,\ v_2$ e v_3.
(3) Determinare la dimensione dello spazio vettoriale $W = \langle v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4 \rangle$.

Esercizio 6.4. *[7.52]* Si consideri il sottoinsieme S di $\mathbb{R}^4$ costituito dai vettori v della forma

$$v = (a_1 - a_2 + 2a_3, a_1, 2a_1 - a_2, a_1 + 3a_2 + a_4)$$

dove a_1, a_2, a_3 e a_4 sono parametri reali.

a) S è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$?
b) In caso di risposta affermativa ad a), trovare una base di S.

Esercizio 6.5. *[7.53]* Si consideri il sottoinsieme S di $\mathbb{R}^4$ costituito dai vettori v della forma

$$v = (a_1 - a_2 + 2a_3 + a_4,\ a_1,\ 2a_1 - a_2,\ a_1 + 3a_2)$$

dove a_1, a_2, a_3 e a_4 sono parametri reali.

a) S è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$?
b) In caso di risposta affermativa ad a), trovare una base di S.

Esercizio 6.6. *[7.56]* Sia

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + (k + 1)z = k, \quad 2x + y + z = 0 \right\}$$

a) Stabilire per quali valori di k l'insieme S è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$.
b) Per il valore di k trovato al punto precedente determinare una base di S.

Esercizio 6.7. *[7.57]* Sia

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + kz = k - 1, \quad x - 2y + z = 0, \quad -2x + 4ky - 2z = 0 \right\}$$

a) Stabilire per quali valori di k l'insieme S è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$.
b) Per il valore di k trovato al punto precedente determinare una base di S.

Esercizio 6.8. *[7.63]* Sia A la matrice reale seguente:

$$A = \begin{bmatrix} k & -k & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & k & 1 \end{bmatrix}$$

a) Determinare il rango di A al variare del parametro reale k.
b) Calcolare una base del nucleo di A, cioé dello spazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo $Ax = 0$, nel caso $k = 1$.

Esercizio 6.9. *[7.50]* Siano U e V i sottospazi di $\mathbb{R}^3$ così definiti

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + z = 0\}$$
$$V = \langle (2, -1, -2), \ (-3, 4, 3) \rangle$$

Dimostrare che $U = V$.

Esercizio 6.10. *[7.64]*

a) Sia

$$V = \langle \ (1, 2, 1), \ (-1, 3, 0), \ (3, 1, 2) \ \rangle$$

Si determini la dimensione e una base di V.

b) Sia

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + 3z = 0, \ 2x + 3y + z = 0, \ x + 2z = 0 \ \}$$

Si determini la dimensione e una base di S.

c) Si confrontino i metodi risolutivi e i risultati dei due precedenti punti.

Esercizio 6.11. *[7.70]* Sia dato l'insieme

$$V = \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] \mid p(1) = 0 \ \}$$

a) Verificare che l'insieme V è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}_3[x]$.

b) Determinare una base di V.

Esercizio 6.12. *[7.71]* Siano dati i polinomi

$$p_1(x) = 1 + x, \qquad p_2(x) = 1 + 2x + x^2, \qquad p_3(x) = x - x^2.$$

a) Verificare che l'insieme $\{p_1(x), \ p_2(x), \ p_3(x)\}$ è una base di $\mathbb{R}_2[x]$.

b) Esprimere $f(x) = x^2 - x + 2$ come combinazione lineare di $p_1(x), \ p_2(x), \ p_3(x)$.

Esercizio 6.13. *[7.74]* Sia W l'insieme dei polinomi $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbb{R}[x]$, di grado al più 3, tali che $p(0) = p(1) = 0$. Determinare un insieme generatore di W.

Esercizio 6.14. *[7.84]* Sia S l'insieme delle matrici simmetriche:

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} \mid a, b, d \in \mathbb{R} \right\}$$

(Notiamo anche che $S = \{A \in M_{2\times 2} \mid A^T = A\}$).

a) Verificare che S è un sottospazio di $M_{2\times 2}$.

b) Determinare una base di S.

Esercizio 6.15. *[7.89]* Sia

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

e sia $S = \{M \in M_2(\mathbb{R}) \mid AM = MA = 0\}$. Dimostrare che S è un sottospazio di $M_2(\mathbb{R})$ e calcolarne la dimensione.

Esercizio 6.16. *[7.90]* Si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

a) Si determini una base del sottospazio $U = \{X \in M_2(\mathbb{R}) : AX = XA\}$.

b) Mostrare che il sottoinsieme $W = \{X \in U : X \text{ è invertibile}\}$ non è un sottospazio vettoriale di U.

Esercizio 6.17. *[7.91]* Sia $W = \langle A, \ B \ , C\rangle$ il sottospazio di $M_2(\mathbb{R})$ generato dalle matrici

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & k \\ -2 & 0 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} k & 1 \\ k-1 & 1 \end{bmatrix}$$

Si determini la dimensione di W e una sua base al variare del parametro reale k.

Esercizio 6.18. *[7.92]* Sia $V = \langle A, B, C\rangle$ il sottospazio di $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ dove

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}.$$

a) Si determini la dimensione e una base di V.

b) Si esprima $D = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ come combinazione lineare della base trovata al punto a).